Solution de l'équation de Laplace à trois dimensions en coordonnées sphériques avec conditions aux limites Dirichlet, Neumann ou Robin par la méthode de séparation des variables, passage à deux dimensions

Le système de coordonnées sphériques est défini par le changement de variable :

$$x = r\ Sin(\vartheta)Cos(\varphi)$$
$$y = r\ Sin(\vartheta)Sin(\varphi)$$
$$z = r\ Cos(\vartheta)$$

Typiquement nous recherchons la solution du problème aux limites intérieur en coordonnées sphérique sur un espace limité dans l'espace des valeurs $r \in [0, l_r]\ ;\ \theta \in [0,\pi]\ ;\ \varphi \in [0, 2\pi]$
Dans ce système de coordonnées l'équation de Laplace s'écrit sous la forme :

$$\Delta T(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(Sin(\theta)\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial^2 T(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\Delta T(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial^2 T(r,\theta,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta^2} + \frac{Cos(\theta)}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}$$

$$+\frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial^2 T(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

Le Jacobien en coordonnées sphériques et la métrique sont :

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Sin(\vartheta)Cos(\varphi) & rCos(\vartheta)Cos(\varphi) & -rSin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ Sin(\vartheta)Sin(\varphi) & rCos(\vartheta)Cos(\varphi) & rSin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ Cos(\vartheta) & -rSin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = r^2 \det\begin{pmatrix} Sin(\vartheta)Cos(\varphi) & Cos(\vartheta)Cos(\varphi) & -Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ Sin(\vartheta)Sin(\varphi) & Cos(\vartheta)Cos(\varphi) & Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ Cos(\vartheta) & -Sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = r^2 Sin(\vartheta)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 Sin(\vartheta) d\varphi^2$$

Le gradient dans ce système de coordonnées prenant la forme :

$$\overrightarrow{Grad\left(T(r,\theta,\varphi)\right)} = \left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right)\mathbf{I}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\right)\mathbf{I}_\theta + \frac{1}{rSin\theta}\left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\right)\mathbf{I}_\phi$$

Les conditions mixtes de Robin sur une iso-surface r=*Cste (sphère)* ou *ϑ=Cste (cône de révolution) prennent alors la forme :*

$$Iso-surface\ r = Cste \qquad\qquad Iso-surface\ \vartheta = Cste$$

$$C.L.\quad \alpha\frac{\partial T(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} + \beta T(r,\vartheta,\varphi)\Big|_{r=r_0} = f_{\partial\Omega}(\vartheta,\varphi) \qquad C.L.\quad \alpha\frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} + \beta T(r,\vartheta,\varphi)\Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = f_{\partial\Omega}(r,\varphi)$$

.

Si les conditions sont homogènes, et dans le cadre de la méthode de séparation des variables, il vient pour une surface ϑ=Cste (cône de révolution)

$$\text{Séparation des variables} \Rightarrow T(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$$

$$Iso-surface\ \vartheta = Cste$$

$$C.L.\quad \alpha\,\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta} + \beta\,\Theta(\vartheta)\Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$$

La variabilité radiale de la condition aux limites introduit donc une difficulté de résolution supplémentaire puisque le système de valeur propre et fonction propre angulaire dépendrait alors de la position en r (en clair cela m'est insurmontable). Dans ce cas de figure on simplifie le problème en supposant, de manière tout à fait académique et certainement irréaliste, que la condition aux limites mixte possède des coefficients indépendant de l'espace. Ce peut être réaliste pour une configuration de cône creux où l'épaisseur radiale est faible et donc le facteur r variant peu. Mais certainement faux pour un cône complet. Car dans la limite des rayons faibles, la condition aux limites se comporte comme une condition de Neumann, tandis que dans les rayons grand, c'est plutôt une condition de Dirichlet. En conclusion les solutions sont exhibées volontairement avec des conditions mixtes fixes, comme suit

$$Iso-surface\ \vartheta = Cste$$

$$C.L.\quad \alpha\,\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta} + \beta\,\Theta(\vartheta)\Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$$

ce qui permet d'ailleurs de condenser en une seule formule, les deux cas limites Dirichlet et Neumann. En revanche les problèmes avec condition de Neumann ou de Dirichlet sont eux susceptible d'être résolus entièrement par la méthode de séparation des variables.

<u>Singularité du système de coordonnées sphérique 3D et régularité du gradient</u>

Dans le cas où le domaine d'étude de la solution de l'équation de Laplace comporte l'origine r*=0, et les valeurs d'angle ϑ=0, ϑ=π, (soit l'axe z finalement) alors l*e système *de coordonnées sphériques comporte une singularité. Cela se traduit par l'annulation du Jacobien sur l'axe z et la singularité "apparente" du Gradient de toute fonction solution de l'équation de Laplace. La solution doit donc neutraliser la singularité apparente du gradient en assurant une valeur bornée à ce dernier soit :*

$$(r,\theta,\varphi)\in\Omega\,/\,r=0\ ou\ \theta=\{0,\pi\}$$

$$\overrightarrow{Grad\big(T(r,\theta,\varphi)\big)} = \left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right)\mathbf{I}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)\mathbf{I}_\theta + \frac{1}{rSin\theta}\left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)\mathbf{I}_\phi$$

$$Grad\big(T(r,\theta,\varphi)\big)^2 = \left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2Sin\theta^2}\left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$\text{Singularité du Jacobien}\quad J\big|_{r=0} = r^2 Sin\theta = 0\quad \text{condition } Grad\big(T(r,\theta,\varphi)\big)\text{ reste bornée } \forall r,\theta,\varphi$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2Sin\theta^2}\left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\Bigg|_{r=0,\theta=0,\pi} \to Cste$$

Cette contrainte n'est en général pas évoquée car elle est de facto remplie par la contrainte de finitude de la solution. Par exemple, les solutions admissibles par séparation des variables dans le système de coordonnées sphériques (voir plus loin) sont :

$$T(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$R(r) = A\,r^n + B\,r^{-(n+1)} \Rightarrow \textit{finitude en } r = 0 \quad , \quad R(r) = r^n$$

$$\Theta(\theta) = A\,P_n^m\left(Cos(\theta)\right) + B\,Q_n^m\left(Cos(\theta)\right) tq\ m <= n \Rightarrow \textit{finitude en } \theta = 0\ ou\ \theta = \pi \quad \Theta(\theta) = P_n^m\left(Cos(\theta)\right)$$

$$\Theta(\theta) = A\,P_n\left(Cos(\theta)\right) + B\,Q_n\left(Cos(\theta)\right) \Rightarrow \textit{finitude en } \theta = 0\ ou\ \theta = \pi \quad \Theta(\theta) = P_n\left(Cos(\theta)\right)$$

$$\Phi(\varphi) = A\,Cos(\varphi) + B\,Sin(\varphi)$$

.

Le respect de la finitude de la solution pour les valeurs r=0 et *ϑ=0, ϑ=π suffit pour assurer la condition de finitude du gradient, voyons ce qu'il advient avec des indices entiers pour les fonctions de Legendre :*

$$R(r) = r^n \quad \Theta(\theta) = P_n^m\left(Cos(\theta)\right) \Rightarrow \Theta'(\theta) = -Sin(\theta)P_n^{m}{}'\left(Cos(\theta)\right) \quad \Phi(\varphi) = \begin{cases} Cos(\varphi) \\ ou\ Sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \Phi'(\varphi) = \begin{cases} -Sin(\varphi) \\ ou\ Cos(\varphi) \end{cases}$$

$$G = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 Sin\theta^2}\left(\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$= \frac{r^{2n} Sin^2(\theta)\begin{Bmatrix} Cos^2(\varphi) \\ ou\ Sin^2(\varphi) \end{Bmatrix}}{r^2}\left(P_n^{m}{}'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2 + \frac{r^{2n}\begin{Bmatrix} Sin^2(\varphi) \\ ou\ Cos^2(\varphi) \end{Bmatrix}}{r^2 Sin^2(\theta)}\left(P_n^m\left(Cos(\theta)\right)\right)^2$$

$$G = r^{2n-2}\left(Sin^2(\theta)\begin{Bmatrix} Cos^2(\varphi) \\ ou\ Sin^2(\varphi) \end{Bmatrix}\left(P_n^{m}{}'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2 + \frac{\begin{Bmatrix} Sin^2(\varphi) \\ ou\ Cos^2(\varphi) \end{Bmatrix}}{Sin^2(\theta)}\left(P_n^m\left(Cos(\theta)\right)\right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \textit{Régularité du terme } \frac{\left(P_n^m\left(Cos(\theta)\right)\right)^2}{Sin^2(\theta)}$$

Expansion en série trigonométrique

$$P_n\left(Cos(\theta)\right) = \frac{2^{2n+2}(n!)^2}{\pi(2n+1)!}\left[Sin\left((n+1)\theta\right) + \frac{n+1}{2n+3}Sin\left((n+3)\theta\right) + \frac{1\times3\times(n+1)(n+2)}{2!(2n+3)(2n+5)}Sin\left((n+5)\theta\right) + \cdots \right]$$

$$P_n^m\left(Cos(\theta)\right) = \frac{2^{m+1}\Gamma(n+m+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}Sin(\theta)^m \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)_k (n+m+1)_k}{k!\left(n+\frac{3}{2}\right)_k}Sin\left((n+m+2k+1)\theta\right)$$

$$\frac{\left(P_n\left(Cos(\theta)\right)\right)^2}{Sin^2(\theta)} \approx A_{11}\frac{\left(Sin\left((n+1)\theta\right)\right)^2}{Sin^2(\theta)} + A_{13}\frac{Sin\left((n+1)\theta\right)Sin\left((n+3)\theta\right)}{Sin^2(\theta)} + A_{33}\frac{\left(Sin\left((n+3)\theta\right)\right)^2}{Sin^2(\theta)} + \cdots$$

Pour $\theta \to 0$

$$\frac{\left(P_n\left(Cos(\theta)\right)\right)^2}{Sin^2(\theta)} \approx A_{11}(n+1)^2 + A_{13}(n+1)(n+3) + A_{33}(n+3)^2 + \cdots = Cste$$

$$\frac{\left(P_n^m\left(Cos(\theta)\right)\right)^2}{Sin^2(\theta)} \approx Sin(\theta)^{2m}\left(A_{11}(n+m+1)^2 + A_{13}(n+m+1)(n+m+3) + A_{33}(n+m+3)^2 + \cdots\right) \to 0 \quad \textit{lorsque } m > 0$$

Pour des géométries comme les cônes sphériques, ainsi que les sections de cône sphérique, il advient que l'on développe les solutions comme une série de fonction de Legendre d'indices non entiers, par exemple sous cette forme (voir plus loin) afin de respecter les conditions de finitude de la solution :

$$\lambda_n \textit{solution de l'équation } P_{\lambda_n}^m(Cos(\theta_0)) = 0$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} B_n r^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

La condition de régularité du gradient devient alors :

$$R(r) = r^{\lambda_n} \quad \Theta(\theta) = P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \Rightarrow \Theta'(\theta) = -Sin(\theta) P_{\lambda_n}'(Cos(\theta))$$

$$G = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{r^{2n} Sin^2(\theta)}{r^2}\left(P_n^m{}'(Cos(\theta))\right)^2$$

$$G = r^{2\lambda_n - 2}\left(Sin^2(\theta)\left(P_n^m{}'(Cos(\theta))\right)^2\right) \Rightarrow \textit{Régularité du terme } \frac{\left(P_n^m(Cos(\theta))\right)^2}{Sin^2(\theta)}$$

Expansion en série trigonométrique

$$P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) = \frac{2\Gamma(\lambda_n+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\lambda_n+\frac{3}{2}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (\lambda_n+1)_k}{k!\left(\lambda_n+\frac{3}{2}\right)_k} Sin((\lambda_n+2k+1)\theta) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)\Gamma(\lambda_n+1+k)}{k!\,\Gamma\left(\lambda_n+\frac{3}{2}+k\right)} Sin((\lambda_n+2k+1)\theta)$$

$$\frac{\left(P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right)^2}{Sin^2(\theta)} \approx A_{11}\frac{\left(Sin((\lambda_n+1)\theta)\right)^2}{Sin^2(\theta)} + A_{13}\frac{Sin((\lambda_n+1)\theta)Sin((\lambda_n+3)\theta)}{Sin^2(\theta)} + A_{33}\frac{\left(Sin((\lambda_n+3)\theta)\right)^2}{Sin^2(\theta)} + \cdots$$

$$\textit{Pour } \theta \to 0$$

$$\frac{\left(P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right)^2}{Sin^2(\theta)} \approx A_{11}(\lambda_n+1)^2 + A_{13}(\lambda_n+1)(\lambda_n+3) + A_{33}(\lambda_n+3)^2 + \cdots = Cste$$

$$G \textit{ fini si } \lambda_n \geq 1$$

La condition de régularité du gradient se résume donc à la condition de valeur propres supérieures ou égale à 1 (finalement c'est un résultat similaire à une géométrie radiale à deux dimensions, ou axi-symétrique).

Dans les exemples donnés de valeurs propres pour le cône sphérique pour un angle d'ouverture aigu, la première valeur propre est bien supérieure à 1, les autres étant nécessairement supérieures. Par contre lorsque l'angle d'ouverture ϑ_0 est supérieure à π/2 (comme si l'on avait une sphère évidée dans sa partie inférieure par un cône sphérique), alors au moins la première valeur propre est inférieure à 1.

Dans ce cas, on peut faire appel au raisonnement impliquant la construction de la solution sur le problème complémentaire du cône à la sphère entière. Appelons problème n°1, le problème sur le cône d'angle obtu. Il y a existence et unicité de la solution du problème de Dirichlet intérieur construite par les fonctions de l'angle obtus. Cette solution s'étend mathématiquement à toute la sphère, donc sur les frontières du cône d'angle aigu. Cela induit donc un problème aux limites de Dirichlet n°2 sur le cône d'angle aigu. Ce dernier se construit également à l'aide des fonctions propres qui possède la régularité du gradient requise sur le système de fonctions et valeurs propres $\lambda'_n \textit{ solution de l'équation } P_{\lambda'_n}^m(Cos(\pi-\theta_0))$ *. Et par existence et unicité de la solution cela induit le respect de la régularité du gradient de la solution dans son domaine complémentaire (le domaine de départ) qui doit être identique à la solution du problème n°1. Ce type de raisonnement s'étend à*

d'autres types de configuration avec des domaines complémentaires.
Pour démontrer la régularité du gradient, on a exploité les formules de développement en série trigonométrique des fonctions de Legendre :

Expansion en série trigonométrique

$$P_n(Cos(\theta))=\frac{2^{2n+2}(n!)^2}{\pi(2n+1)!}\left[Sin((n+1)\theta)+\frac{n+1}{2n+3}Sin((n+3)\theta)+\frac{1\times3\times(n+1)(n+2)}{2!(2n+3)(2n+5)}Sin((n+5)\theta)+\cdots\right]$$

$$P_n^m(Cos(\theta))=\frac{2^{m+1}\Gamma(n+m+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}Sin(\theta)^m\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)_k(n+m+1)_k}{k!\left(n+\frac{3}{2}\right)_k}Sin((n+m+2k+1)\theta)\quad\forall n,m\in\mathbf{R}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Rightarrow P_p(Cos(\theta))=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{k}\right)\Gamma(p+1+\mathrm{k})}{k!\Gamma\left(\mathrm{p}+\frac{3}{2}+\mathrm{k}\right)}Sin((p+2k+1)\theta)\quad\forall p\in\mathbf{R}$$

$$Q_n(Cos(\theta))=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}\left[Cos((n+1)\theta)+\frac{n+1}{2n+3}Cos((n+3)\theta)+\frac{1\times3\times(n+1)(n+2)}{2!(2n+3)(2n+5)}Cos((n+5)\theta)+\cdots\right]$$

$$Q_n^m(Cos(\theta))=\frac{\sqrt{\pi}\,2^m\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}Sin(\theta)^m\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)_k(n+m+1)_k}{k!\left(n+\frac{3}{2}\right)_k}Cos((n+m+2k+1)\theta)\quad\forall n,m\in\mathbf{R}$$

où $(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k=\alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)=\frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)}$ $\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

Voici quelques valeurs spéciales des fonctions de Legendre qui servent également pour déterminer les conditions de finitude des solutions de l'équation de Laplace.

$$P_\nu(0)=\frac{2^\mu Cos\left(\pi\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}\quad P_\nu(1)=1\quad P_n(-1)=(-1)^n\quad n\in\mathbf{N}\quad P_\nu(-1)=-\infty\, Sign(Sin(\pi\nu$$

$$P_\nu{}'(0)=\frac{2Sin\left(\pi\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}=\frac{\nu\, Sin\left(\pi\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}=\frac{\nu\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\nu}{2}\right)}$$

$$P_\nu^\mu(0)=\frac{2^\mu Cos\left(\pi\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right)}=\frac{2^\mu\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+\nu-\mu}{2}\right)}$$

$$P_\nu^\mu{}'(0)=\frac{2^{\mu+1} Sin\left(\pi\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}=\frac{2^\mu(\nu+\mu)Sin\left(\pi\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}=\frac{2^\mu(\nu+\mu)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu+\mu}{2}\right)}$$

$$Q_\nu(0)=-\frac{\pi\sqrt{\pi}\,Tan\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}{\nu\,\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\quad Q_\nu(1)=\infty\quad Q_\nu(-1)=\infty$$

$$Comme\quad \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)=\frac{\pi}{Sin\left(\pi\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\right)}=\frac{\pi}{Cos\left(\pi\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\right)}\quad formule\ de\ réflexion\ de\ Gamma$$

$$Q_\nu^\mu(0)=-\frac{2^{\mu-1}\sqrt{\pi}\,Sin\left(\pi\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+\nu-\mu}{2}\right)}=-\frac{2^{\mu-1}\pi\sqrt{\pi}\,Tan\left(\pi\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+\nu-\mu}{2}\right)}=-\frac{2^\mu\pi\sqrt{\pi}\,Tan\left(\pi\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{(\nu-\mu)\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)}$$

$$Q_\nu^\mu(1)=\infty\quad Q_\nu^\mu(-1)=\infty\quad \mu\in\mathbf{Z}\quad Q_\nu^\mu{}'(0)=\frac{2^\mu\sqrt{\pi}\,Cos\left(\pi\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}$$

Les solutions l'équation séparée dans les trois coordonnées sphériques r,ϑ,φ sont :

$$T(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

cas général

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) - \frac{\alpha_2}{r^2}R(r) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) + \left[\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta) = 0 \\ \Phi''(\varphi) + \alpha_3\Phi(\varphi) = 0 \end{array} \right.$$

si $\alpha_2 = n(n+1)$ *et* $\alpha_3 = m^2$ *avec* n, m *entier,*

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}R(r) = 0 \Rightarrow R(r) = A\,r^n + B\,r^{-(n+1)} \\ \Theta''(\theta) + \frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A\,P_n^m(Cos(\theta)) + B\,Q_n^m(Cos(\theta))\ tq\ m <= n \\ \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\,Cos(m\varphi) + B\,Sin(m\varphi) \end{array} \right.$$

$P_n^m(z)$ *Fonction de Legendre associées de première espèce de degré n et d'ordre m*

$Q_n^m(z)$ *Fonction de Legendre associées de deuxième espèce de degré n et d'ordre m*

valeur propre nulle $\rightarrow$ *si* $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$

$$\Rightarrow R(r) = A + B/r$$

$$\Theta(\theta) = C + D\,Log\left[\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right]$$

$$\Phi(\varphi) = E + F\,\varphi$$

Lorsque le problème aux limites se développe sur des corps totalement sphériques alors les solutions doivent être 2π-périodique tant en ϑ que φ, il vient nécessairement que les paramètres n et m sont des entiers. De plus le développement des fonctions de Legendre associées (polynômes associées dans le cas de première espèces) est contraint par les valeurs d'ordre limité m dans l'intervalle [0,+n]. La forme la plus générale de solutions d'un problème aux conditions aux limites sphériques :

$$T(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=+n}\left(A_{rn}r^n + B_{rn}r^{-(n+1)}\right)\left(A_{\theta n}P_n^m(Cos(\theta)) + B_{\theta n}Q_n^m(Cos(\theta))\right)\left(A_{\varphi m}Cos(m\varphi) + B_{\varphi m}Sin(m\varphi)\right)$$

La solution Logarithmique comporte une singularité à angle nul, et n'est donc pas retenue-> D=0.

Il y a une relation d'orthogonalité des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce :

$$\int_{-1}^{1} dz\, P_n^m(z)P_l^m(z) = 0\ si\ n \neq l \quad , \quad \int_{-1}^{1} dz\, Q_n^m(z)Q_l^m(z) = 0\ si\ n \neq l \quad , \quad \int_{-1}^{1} dz\, P_n^m(z)Q_l^m(z) = 0\ si\ n \neq l$$

$$\int_{-1}^{1} dz\, P_n^m(z)^2 = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \qquad \int_{-1}^{1} dz\, P_n^m(z) = \begin{cases} 0 \quad si\ m = 0 \\ \dfrac{\left((-1)^m + (-1)^n\right)2^{m-2}\, m\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \end{cases}$$

.

Lorsque l'on réduit à deux dimensions et que la géométrie du problème et des conditions aux limites implique, par exemple, que la solution ne dépend pas de ϕ, alors les deux équations séparées sont :

$$T(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$

$$cas\ général \Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)-\frac{\alpha_2}{r^2}R(r)=0 \\ \Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\alpha_2\Theta(\theta)=0 \end{array} \right.$$

$$si \quad \alpha_2=n(n+1)\ \ avec \quad n \quad entier,$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)-\frac{n(n+1)}{r^2}R(r)=0 \Rightarrow R(r)=A\,r^n+B\,r^{-(n+1)} \\ \Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+[n(n+1)]\Theta(\theta)=0 \Rightarrow \Theta(\theta)=A\,P_n(Cos(\theta))+B\,Q_n(Cos(\theta)) \end{array} \right.$$

$P_n(z)$ *Polynôme de Legendre de degré n* $\quad Q_n(z)$*Fonction de Legendre de deuxième espèce de degré n*

$$valeur\ propre\ nulle \rightarrow si\ \alpha_2=0 \Rightarrow R(r)=A+B/r\ ;\ \Theta(\theta)=C+D\ Log[\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}]$$

La solution logarithmique comporte toujours une singularité à angle ϑ=0, et n'est donc pas retenue-> D=0. Les relations d'orthogonalité des polynômes et fonctions de Legendre de première et deuxième espèces sont:

$$\int_{-1}^{1} dz\ P_m(z)P_{m'}(z)=\partial_{m,m'}\frac{2}{2m+1} \quad , \quad \int_{-1}^{1} dz\ Q_m(z)Q_{m'}(z)=0 \quad et \quad \int_{-1}^{1} dz\ P_m(z)Q_{m'}(z)=0\ si\ m\neq m'$$

$$P_m(-z)=(-1)^m P_m(z) \Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\ z^k P_m(z)=\int_{0}^{1} dz\ (-z)^k P_m(-z)+\int_{0}^{1} dz\ z^k P_m(z)=(1+(-1)^{k-m})\int_{0}^{1} dz\ z^k P_m(z)$$

$$\int_{-1}^{1} dz\ z^k P_m(z)=0\ \forall k\in \mathbf{Z}/k<m \Rightarrow \int_{0}^{1} dz\ z^k P_m(z)=0\ \forall k\in \mathbf{Z}/(k-m\ pair)\ et\ k<m$$

$$Pour\ k=m \Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\ z^m P_m(z)=\frac{2^{m+1}m!}{(2m+1)!} \quad et \quad \int_{0}^{1} dz\ z^m P_m(z)=\frac{2^m m!}{(2m+1)!}$$

$$Si\ k-m\ impair\ et\ k>m \quad alors \int_{-1}^{1} dz\ z^k P_m(z)=0$$

$$Si\ k-m\ pair\ et\ k>m \quad alors \int_{-1}^{1} dz\ z^k P_m(z)=\frac{2^{m+1}k!\left(\frac{k+m}{2}\right)!}{\left(\frac{k-m}{2}\right)!(k+m+1)!} \quad et \quad \int_{0}^{1} dz\ z^k P_m(z)=\frac{2^m k!\left(\frac{k+m}{2}\right)!}{\left(\frac{k-m}{2}\right)!(k+m+1)!}$$

Lorsque la géométrie du problème et des conditions aux limites implique que l'on puisse réduire à une seule dimension radiale (r) et que, par exemple, la solution ne dépend que de cette variable r, alors la solution de l'équation devient : $T(r)=A+B/r$ *. Cette solution radiale en r présente une singularité en r=0, et ne peut donc être utilisée que lorsque le domaine ne comprend pas l'origine(une sphère creuse par exemple).*

On verra plus loin que l'orthogonalité des fonctions propres s'étend à toute combinaison linéaire de fonctions de Legendre de première et deuxième espèces solution du problème de Sturm-Liouville en coordonnées sphérique sur un intervalle quelconque dans [-1,1].

La partie angulaire des équations séparées peut être réécrite par un changement de variable :

$$\Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\left[p(p+1)-\frac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta)=0$$

$$z=Cos(\theta)\Rightarrow\frac{dz(\theta)}{d\theta}=-Sin(\theta)=-\sqrt{1-z^2}\qquad\frac{d^2z(\theta)}{d\theta^2}=-Cos(\theta)$$

$$\frac{d\Theta(\theta(z))}{d\theta}=\frac{d\Theta(z)}{dz}\frac{dz(\theta)}{d\theta}=-Sin(\theta)\frac{d\Theta(z)}{dz}$$

$$\Theta''(\theta)=\frac{dz(\theta)}{d\theta}\frac{d\Theta'(\theta(z))}{dz}=Sin(\theta)\frac{d}{dz}\left(\sqrt{1-z^2}\,\frac{d\Theta(z)}{dz}\right)=\left(1-z^2\right)\frac{d^2\Theta(z)}{dz^2}-\frac{2z}{2}\frac{Sin(\theta)}{\sqrt{1-z^2}}\frac{d\Theta(z)}{dz}$$

$$\Rightarrow\left(1-z^2\right)\frac{d^2\Theta(z)}{dz^2}-z\frac{d\Theta(z)}{dz}-z\frac{d\Theta(z)}{dz}+\left[p(p+1)-\frac{m^2}{\left(1-z^2\right)}\right]\Theta(z)=0$$

$$\Rightarrow\left(z^2-1\right)\Theta''(z)+2z\,\Theta'(z)-\left[p(p+1)+\frac{m^2}{\left(z^2-1\right)}\right]\Theta(z)=0$$

Qui est l'équation "officielle" des fonctions de Legendre, et dont la résolution dans les cas de paramètre p et m réels donne une extension des polynômes de Legendre initiaux. Cette équation dans le cas où le problème ne dépend pas de l'angle φ (m=0) donne :

$$\left(z^2-1\right)\Theta''(z)+2z\,\Theta'(z)-p(p+1)\Theta(z)=0$$

Le problème de Sturm-Liouville pour une configuration sphérique peut se présenter sous deux formes plus générales :
à trois dimensions :

$$\left(1-z^2\right)\Phi_p^m{}''(z)-2z\,\Phi_p^m{}'(z)+\left[p(p+1)-\frac{m^2}{\left(1-z^2\right)}\right]\Phi_p^m(z)=0$$

$$C.L.\quad a_1\Phi_p^m(z_1)+b_1\Phi_p^m{}'(z_1)=0$$

$$a_2\Phi_p^m(z_2)+b_2\Phi_p^m{}'(z_2)=0$$

Et à deux dimensions :

$$\left(1-z^2\right)\Phi_n''(z)-2z\,\Phi_n'(z)+p(p+1)\Phi_n(z)=0$$

$$C.L.\quad a_1\Phi_n(z_1)+b_1\Phi_n'(z_1)=0$$

$$a_2\Phi_n(z_2)+b_2\Phi_n'(z_2)=0$$

où m est paramètre entier naturel positif et p une valeur réelle déterminer par les conditions aux limites du problème de Sturm-Liouville.

Les fonctions propres de ce problème de Sturm-Liouville s'exprime comme une combinaison linéaire de fonctions de Legendre de première et deuxième espèce :

$$\Phi_n(z)=a\,P_{\lambda_n}(z)+b\,Q_{\lambda_n}(z)$$

les valeurs propres sont calculées de telle manière que les conditions aux limites soient respectées.

L'orthogonalité des fonctions propres se démontre pareillement aux cas des fonctions de Bessel :

$$(1)\quad \left(1-z^2\right)\Phi_p^m{}''(z) - 2z\,\Phi_p^m{}'(z) + \left[p(p+1) - \frac{m^2}{\left(1-z^2\right)}\right]\Phi_p^m(z) = 0$$

$$(2)\quad \left(1-z^2\right)\Phi_{p'}^m{}''(z) - 2z\,\Phi_{p'}^m{}'(z) + \left[p'(p'+1) - \frac{m^2}{\left(1-z^2\right)}\right]\Phi_{p'}^m(z) = 0$$

$$C.L.\quad (3)\quad a_1\Phi_p^m(z_1) + b_1\Phi_p^m{}'(z_1) = 0$$

$$(4)\quad a_1\Phi_{p'}^m(z_1) + b_1\Phi_{p'}^m{}'(z_1) = 0$$

$$(5)\quad a_2\Phi_p^m(z_2) + b_2\Phi_p^m{}'(z_2) = 0$$

$$(6)\quad a_2\Phi_{p'}^m(z_2) + b_2\Phi_{p'}^m{}'(z_2) = 0$$

$$(3)\times\Phi_{p'}^m(z_1) - (4)\times\Phi_p^m(z_1) \Leftrightarrow b_1\left(\Phi_p^m{}'(z_1)\Phi_{p'}^m(z_1) - \Phi_p^m(z_1)\Phi_{p'}^m{}'(z_1)\right) = 0 \quad (7)$$

$$(3)\times\Phi_{p'}^m(z_2) - (4)\times\Phi_p^m(z_2) \Leftrightarrow b_2\left(\Phi_p^m{}'(z_2)\Phi_{p'}^m(z_2) - \Phi_p^m(z_2)\Phi_{p'}^m{}'(z_2)\right) = 0 \quad (8)$$

$$(1)\times\Phi_{p'}^m(z) - (2)\times\Phi_p^m(z) \Leftrightarrow \left(1-z^2\right)\Phi_{p'}^m(z)\Phi_p^m{}''(z) - 2z\,\Phi_{p'}^m(z)\Phi_p^m{}'(z) + \left[p(p+1) - \frac{m^2}{\left(1-z^2\right)}\right]\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m(z)$$

$$-\left(\left(1-z^2\right)\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m{}''(z) - 2z\,\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m{}'(z) + \left[p'(p'+1) - \frac{m^2}{\left(1-z^2\right)}\right]\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m(z)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[p(p+1) - p'(p'+1)\right]\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m(z) + \left(1-z^2\right)\left(\Phi_{p'}^m(z)\Phi_p^m{}''(z) - \Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m{}''(z)\right)$$

$$-2z\left(\Phi_{p'}^m(z)\Phi_p^m{}'(z) - \Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m{}'(z)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[p(p+1) - p'(p'+1)\right]\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m(z) + \frac{d}{dz}\left[\left(1-z^2\right)\left(\Phi_p^m{}'(z)\Phi_{p'}^m(z) - \Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m{}'(z)\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dz}\left[\left(1-z^2\right)\left(\Phi_p^m{}'(z)\Phi_{p'}^m(z) - \Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m{}'(z)\right)\right] + \left(p-p'\right)\left(p+p'+1\right)\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m(z) = 0$$

intégrant sur l'interval $[z_1, z_2]$

$$\Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} dz\,\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m(z) = \frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m{}'(z) - \Phi_p^m{}'(z)\Phi_{p'}^m(z)\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{\left(p-p'\right)\left(p+p'+1\right)}$$

$$\Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} dz\,\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m(z) = \frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\Phi_p^m(z)\frac{d\Phi_{p'}^m(z)}{dz} - \Phi_{p'}^m(z)\frac{d\Phi_p^m(z)}{dz}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{\left(p-p'\right)\left(p+p'+1\right)}$$

et comme précédemment $\left[\left(1-z^2\right)\left(\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m{}'(z) - \Phi_p^m{}'(z)\Phi_{p'}^m(z)\right)\right]_{z_1}^{z_2} = 0$ *voir* (7,8)

$$\Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} dz\,\Phi_p^m(z)\Phi_{p'}^m(z) = 0 \quad si\ p \neq p'$$

On a de la même façon la relation avec les fonctions de Legendre de degré p :

$$\int_{z_1}^{z_2} dz\,\Phi_p(z)\Phi_{p'}(z) = \frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\Phi_p(z)\frac{d\Phi_{p'}(z)}{dz} - \Phi_{p'}(z)\frac{d\Phi_p(z)}{dz}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{\left(p-p'\right)\left(p+p'+1\right)}$$

$$\left[\left(1-z^2\right)\left(\Phi_p(z)\Phi_{p'}{}'(z) - \Phi_p{}'(z)\Phi_{p'}(z)\right)\right]_{z_1}^{z_2} = 0 \Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} dz\,\Phi_p(z)\Phi_{p'}(z) = 0 \quad si\ p \neq p'$$

Le calcul de la norme des fonctions propres se fait comme suit pour les fonctions de Legendre solution du problème sphérique à trois dimensions:

Posons $p = p' + \Delta p'$ *et substituons* $\Phi_p^m(z) \approx \Phi_{p'}^m(z) + \left(\frac{\partial \Phi_{p'}^m(z)}{\partial p'}\right)\Delta p'$ *et en passant à la limite* $\Delta p' \to 0$

en considérant les fonctions dépendant de z et $p' \Rightarrow \frac{d}{dz} \to \frac{\partial}{\partial z}$

$$\Phi_p^m(z)\frac{\partial \Phi_{p'}^m(z)}{\partial z} - \Phi_{p'}^m(z)\frac{\partial \Phi_p^m(z)}{\partial z} \approx$$

$$\approx \Phi_{p'}^m(z)\frac{\partial \Phi_{p'}^m(z)}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Phi_{p'}^m(z)}{\partial p'}\right)\frac{\partial \Phi_{p'}^m(z)}{\partial z}\Delta p' - \Phi_{p'}^m(z)\frac{\partial \Phi_{p'}^m(z)}{\delta z} - \Phi_{p'}^m(z)\left(\frac{\partial^2 \Phi_{p'}^m(z)}{\partial z \partial p'}\right)\Delta p'$$

$$\approx \left(\frac{\partial \Phi_{p'}^m(z)}{\partial p'}\right)\frac{\partial \Phi_{p'}^m(z)}{\partial z}\Delta p' - \Phi_{p'}^m(z)\left(\frac{\partial^2 \Phi_{p'}^m(z)}{\partial z \partial p'}\right)\Delta p'$$

$$\int_{z_1}^{z_2} dz\,\left(\Phi_p^m(z)\right)^2 \approx \frac{\left[\Delta p'\left(1-z^2\right)\left(\frac{\partial \Phi_{p'}^m(z)}{\partial p'}\frac{\partial \Phi_{p'}^m(z)}{\partial z} - \Phi_{p'}^m(z)\frac{\partial^2 \Phi_{p'}^m(z)}{\partial z \partial p'}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{\Delta p'\left(p + p' + 1\right)}$$

lorsque $p \to p' \Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} dz\,\left(\Phi_p^m(z)\right)^2 = \frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\frac{\partial \Phi_p^m(z)}{\partial p}\frac{\partial \Phi_p^m(z)}{\partial z} - \Phi_p^m(z)\frac{\partial^2 \Phi_p^m(z)}{\partial z \partial p}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{\left(2p+1\right)}$

On obtient un résultat similaire pour les fonctions de Legendre solution du problème sphérique à deux dimensions :

$$\int_{z_1}^{z_2} dz\,\left(\Phi_p(z)\right)^2 = \frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\frac{\partial \Phi_p(z)}{\partial p}\frac{\partial \Phi_p(z)}{\partial z} - \Phi_p(z)\frac{\partial^2 \Phi_p(z)}{\partial z \partial p}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{\left(2p+1\right)}$$

Pour les dérivées premières des fonctions de Legendre de degré p réel ou de degré p et d'ordre m (entier), il existe des formules permettant de les calculer. Celles concernant les dérivées premières en z sont :

$$\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial z} = \frac{\nu}{z^2-1}\left(zP_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)\right) \quad \frac{\partial Q_\nu(z)}{\partial z} = \frac{\nu}{z^2-1}\left(zQ_\nu(z) - Q_{\nu-1}(z)\right) \quad \forall \nu > 0 \in \Re \text{ ou } \mathbf{N}$$

$$\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial z} = \frac{1}{z^2-1}\left(z\nu\, P_\nu^m(z) - (\nu+m)P_{\nu-1}^m(z)\right) \quad \frac{\partial Q_\nu^m(z)}{\partial z} = \frac{1}{z^2-1}\left(z\nu\, Q_\nu^m(z) - (\nu+m)Q_{\nu-1}^m(z)\right) \quad \forall \nu > 0 \in \Re \text{ ou } \mathbf{N}$$

Il existe plusieurs relations pour déterminer les intégrales indéfinies des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce :

$$\int dz\, P_\nu(z) = \frac{P_{\nu+1}(z) - P_{\nu-1}(z)}{2\nu+1} \quad \int dz\, Q_\nu(z) = \frac{Q_{\nu+1}(z) - Q_{\nu-1}(z)}{2\nu+1} \quad \int dz\, P_\nu(z) = \frac{P_{\nu+1}(z) - zP_\nu(z)}{\nu}$$

$$\int dz\, Q_\nu(z) = \frac{Q_{\nu+1}(z) - zQ_\nu(z)}{\nu} \quad \int dz\, P_\nu(z) = \frac{zP_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)}{\nu+1} \quad \int dz\, Q_\nu(z) = \frac{zQ_\nu(z) - Q_{\nu-1}(z)}{\nu+1}$$

$$\int dz\, P_\nu(z) = \frac{\left(z^2-1\right)\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial z}}{\nu(\nu+1)} \qquad \int dz\, Q_\nu(z) = \frac{\left(z^2-1\right)\frac{\partial Q_\nu(z)}{\partial z}}{\nu(\nu+1)}$$

.

Pour ce qui est des dérivées premières du paramètre réel v, les formules sont plus complexes pour les fonctions P de Legendre et de Legendre associées:

Fonctions de Legendre de première espèce

$$(F1) \Rightarrow \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{(k!)^2} \left(\psi(k+\nu+1) - \psi(\nu-k+1)\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \quad \forall \nu > 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$(F2) \Rightarrow \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu} = \pi \frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)} P_\nu(z) - \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{(k!)^2} \left(\psi(k-\nu) - \psi(k+\nu+1)\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\forall \nu > 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$(F3) \Rightarrow \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \sum_{j=1}^{j=k} S_k^{(j)} \nu^j \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^r S_k^{(k)} \left(\frac{j}{\nu} + \frac{r}{\nu+1}\right) (\nu+1)^r$$

$$\forall \nu > 0 \in \Re \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$(F4) \Rightarrow \begin{cases} A_\nu(z) = Sin(\pi\nu) \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(k+1)\, k!} \left(\psi(k+\nu+1) - \psi(k-\nu)\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \\ \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu} = \pi \frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)} P_\nu(z) - \frac{1}{\pi} A_\nu(z) \end{cases}$$

$$\forall \nu > 0 \in \Re \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

Fonctions de Legendre associées de première espèce

$$(F1) \Rightarrow \frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu} = \pi \frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)} P_\nu(z) - \frac{(1+z)^{m/2}}{(1-z)^{m/2}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{\Gamma(k-m+1)\, k!} \left(\psi(k-\nu) - \psi(k+\nu+1)\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$(F2) \Rightarrow \frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu} = \frac{(1+z)^{m/2}}{(1-z)^{m/2}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{\Gamma(k-m+1)\, k!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \sum_{j=1}^{j=k} S_k^{(j)} \nu^j \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^r S_k^{(k)} \left(\frac{j}{\nu} + \frac{r}{\nu+1}\right) (\nu+1)^r$$

$$\forall \nu > 0 \in \Re \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$(F3) \Rightarrow \begin{cases} A_\nu^m(z) = Sin(\pi\nu) \frac{(1+z)^{m/2}}{(1-z)^{m/2}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(k-m+1)\, k!} \left(\psi(k+\nu+1) - \psi(k-\nu)\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \\ \frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu} = \pi \frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)} P_\nu^m(z) - \frac{1}{\pi} A_\nu^m(z) \end{cases}$$

$$\forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

où $(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\, (\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$ $\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* $\Leftarrow \psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$S_k^{(j)}$ *nombre de Stirling de première espèce*

Pour trouver la dérivée seconde de l'expression, on substitue l'expression de la dérivée première en z dans la dérivée seconde, soit :

$$\frac{\partial^2 P_\nu(z)}{\partial z \partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\nu\left(zP_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)\right)}{z^2-1}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 P_\nu(z)}{\partial z \partial \nu} = \frac{zP_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)}{z^2-1} + \frac{\nu}{z^2-1}\left(z\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial P_{\nu-1}(z)}{\partial \nu}\right)$$

$$\frac{\partial^2 P_\nu^m(z)}{\partial z \partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\left(z\nu P_\nu^m(z) - (\nu+m)P_{\nu-1}^m(z)\right)}{z^2-1}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 P_\nu^m(z)}{\partial z \partial \nu} = \frac{zP_\nu^m(z) - P_{\nu-1}^m(z)}{z^2-1} + \frac{\left(z\nu\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu} - (\nu+m)\frac{\partial P_{\nu-1}^m(z)}{\partial \nu}\right)}{z^2-1}$$

On peut également prendre la formule F1 et dériver directement selon z :

Fonctions de Legendre de première espèce

$$(F1) \Rightarrow \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\psi(k+\nu+1) - \psi(\nu-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \quad \forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$\frac{\partial^2 P_\nu(z)}{\partial z \partial \nu} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 P_\nu(z)}{\partial z \partial \nu} = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{2(k!)^2} k\left(\psi(k+\nu+1) - \psi(\nu-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^{k-1} \forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

Pour les fonctions Q de Legendre, on développe les dérivées premières du paramètre réel v selon les formules suivantes :

$$(F1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q_\nu(z)}{\partial \nu} = \pi\frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}Q_\nu(z) - \psi^{(1)}(\nu+1)P_\nu(z) + \\ + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \psi(k+1) - \psi(\nu+1)\right)\left(\psi(k+\nu+1) - \psi(k-\nu)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \end{cases}$$

$$(F2) \Rightarrow \begin{cases} A_\nu(z) = Sin(\pi\nu)\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(k+1)\, k!}\left(\psi(k+\nu+1) - \psi(k-\nu)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \\ \frac{\partial Q_\nu(z)}{\partial \nu} = -\frac{\pi^2}{2}P_\nu(z) - \frac{Cos(\pi\nu)}{2Sin(\pi\nu)}A_\nu(z) + \frac{1}{2Sin(\pi\nu)}A_\nu(-z) \end{cases}$$

$$\forall \nu > 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

où $(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\,(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$ $\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* $\Leftarrow \psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$\psi^{(1)}(\alpha)$ *dérivée première de la fonction Digamma* $S_k^{(j)}$ *nombre de Stirling de première espèce*

Pour les fonctions Q de Legendre associées, on développe les dérivées premières du paramètre réel v selon les formules suivantes :

$$(F1)\Rightarrow \frac{\partial Q_\nu^\mu(z)}{\partial \nu}=\frac{\pi\, e^{i\pi\mu}}{2Sin(\pi\,\mu)}\left(\begin{array}{l}\pi\,\frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}P_\nu^\mu(z)-(1-\mu+\nu)_{2\mu}\left(\pi\,\frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}-\psi(1-\mu+\nu)+\psi(1+\mu+\nu)\right)P_\nu^{-\mu}(z)-\\ -\frac{(z+1)^{\mu/2}}{(z-1)^{\mu/2}}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(1+\nu)_k}{\Gamma(1-\mu+k)\,k!}\left(\psi(k-\nu)-\psi(k+\nu+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+\\ +\frac{(\nu-\mu+1)_{2\mu}(z-1)^{\mu/2}}{(z+1)^{\mu/2}}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(1+\nu)_k}{\Gamma(1+\mu+k)\,k!}\left(\psi(k-\nu)-\psi(k+\nu+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right)$$

$$\forall\nu>_k 0\in\Re,\nu\notin\mathbf{Z}\quad tel\ que\left|\frac{1-z}{2}\right|<1$$

$$(F2)\Rightarrow \frac{\partial Q_\nu^\mu(z)}{\partial \nu}=\frac{\pi\, e^{i\pi\mu}}{2Sin(\pi\,\mu)}\left(\begin{array}{l}-(1-\mu+\nu)_{2\mu}\left(\psi(1+\mu+\nu)-\psi(1-\mu+\nu)\right)P_\nu^{-\mu}(z)+\\ +\frac{(z+1)^{\mu/2}}{(z-1)^{\mu/2}}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{\Gamma(k-\mu+1)\,k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\sum_{j=1}^{j=k}S_k^{(j)}\nu^j\sum_{r=1}^{r=k}(-1)^r S_k^{(k)}\left(\frac{j}{\nu}+\frac{r}{\nu+1}\right)(\nu+1)^r-\\ -\frac{(\nu-\mu+1)_{2\mu}(z-1)^{\mu/2}}{(z+1)^{\mu/2}}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\left(\frac{1-z}{2}\right)^k}{\Gamma(k-\mu+1)\,k!}\sum_{j=1}^{j=k}S_k^{(j)}\nu^j\sum_{r=1}^{r=k}(-1)^r S_k^{(k)}\left(\frac{j}{\nu}+\frac{r}{\nu+1}\right)(\nu+1)^r\end{array}\right)$$

$$\forall\nu>0\in\Re\quad tel\ que\left|\frac{1-z}{2}\right|<1$$

$$(F3)\Rightarrow\left(\begin{array}{l}A_\nu^\mu(z)=Sin(\pi\nu)\frac{(1+z)^{\mu/2}}{(1-z)^{\mu/2}}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(k-\mu+1)\,k!}\left(\psi(k+\nu+1)-\psi(k-\nu)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\\ \frac{\partial Q_\nu^\mu(z)}{\partial\nu}=-\frac{\pi^2}{2}P_\nu^\mu(z)+\frac{\pi\,Sin(\pi\mu)}{Sin(\pi\nu)Sin(\pi(\nu+\mu))}Q_\nu^\mu(z)-\frac{Cos(\pi(\nu+\mu))}{2Sin(\pi(\nu+\mu))}A_\nu^\mu(z)+\frac{1}{2Sin(\pi(\nu+\mu))}A_\nu^\mu(-z)\end{array}\right.$$

$$\forall\nu>_k 0\in\Re,\nu\notin\mathbf{Z}\quad tel\ que\left|\frac{1-z}{2}\right|<1$$

où $(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k=\alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$ $\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* $\Leftarrow\psi(\alpha)=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$\psi^{(1)}(\alpha)$ *dérivée première de la fonction Digamma* $S_k^{(j)}$ *nombre de Stirling de première espèce*

En développant l'intégrale de la norme , on obtient le résultat suivant :

$$(Forme1)\quad \int_{z_1}^{z_2} dz\,(\Phi_p(z))^2 = \frac{\left[(1-z^2)\left(\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial p}\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial z} - \Phi_p(z)\frac{\partial^2\Phi_p(z)}{\partial z\partial p}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{(2p+1)}$$

$$Développons\ A = (1-z^2)\left(\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial p}\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial z} - \Phi_p(z)\frac{\partial^2\Phi_p(z)}{\partial p\,\partial z}\right) avec\ \frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial z} = \frac{p}{z^2-1}(z\Phi_p(z) - \Phi_{p-1}(z))$$

$$et\ \frac{\partial^2\Phi_p(z)}{\partial p\partial z} = \frac{1}{z^2-1}(z\Phi_p - \Phi_{p-1}(z)) + \frac{p}{z^2-1}\left(z\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial p} - \frac{\partial\Phi_{p-1}(z)}{\partial p}\right) \Rightarrow$$

$$A = (1-z^2)\left(\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial p}\frac{p}{z^2-1}(z\Phi_p(z) - \Phi_{p-1}(z)) - \frac{\Phi_p(z)}{z^2-1}\left((z\Phi_p(z) - \Phi_{p-1}(z)) + p\left(z\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial p} - \frac{\partial\Phi_{p-1}(z)}{\partial p}\right)\right)\right)$$

$$= p\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial p}(\Phi_{p-1}(z) - z\Phi_p(z)) + \Phi_p(z)(z\Phi_p(z) - \Phi_{p-1}(z)) + p\Phi_p(z)\left(z\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial p} - \frac{\partial\Phi_{p-1}(z)}{\partial p}\right)$$

$$= \Phi_p(z)(z\Phi_p(z) - \Phi_{p-1}(z)) + p\left(\Phi_{p-1}(z)\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial p} - \Phi_p(z)\frac{\partial\Phi_{p-1}(z)}{\partial p}\right)$$

$$(Forme2)\quad \int_{z_1}^{z_2} dz\,\Phi_p(z)^2 = \frac{\left[\Phi_p(z)(z\Phi_p(z) - \Phi_{p-1}(z)) + p\left(\Phi_{p-1}(z)\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial p} - \Phi_p(z)\frac{\partial\Phi_{p-1}(z)}{\partial p}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{(2p+1)}$$

ou bien encore

$$(Forme2)\quad \int_{z_1}^{z_2} dz\,\Phi_p(z)^2 = \frac{p}{(2p+1)}\left[\frac{(z^2-1)\Phi_p(z)\Phi_p'(z)}{p^2} + \left(\Phi_{p-1}(z)\frac{\partial\Phi_p(z)}{\partial p} - \Phi_p(z)\frac{\partial\Phi_{p-1}(z)}{\partial p}\right)\right]_{z_1}^{z_2}$$

Nous appliquerons notamment ces formules dans le cas de configuration de corps en cône sphérique pour des conditions aux limites de Dirichlet ou Neumann.

Considérons un problème aux limites quelconque dans une sphère, alors selon le système de coordonnées sphériques et ses propriétés de symétrie, les contraintes sur la solution sont les suivantes, et elles doivent s'appliquer sur une configuration de corps sphérique ou même de révolution sphérique comme un cône sphérique ou un hémisphère :

$T(r,\theta,\varphi)$ *fini*

$T(r,\theta,\varphi)$ *périodique en* φ *de période* 2π *soit* $T(r,\theta,\varphi) = T(r,\theta,\varphi+2\pi)$

$\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}$ *périodique en* φ *de période* 2π *soit* $\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = \frac{\partial T(r,\theta,\varphi+2\pi)}{\partial\varphi}$

$T(r,\theta,\varphi)$ *fonction paire en* θ *soit* $T(r,-\theta,\varphi) = T(r,\theta,\varphi)$

$T(r,\theta,\varphi)$ *ne comporte aucune singularité en* $\theta = 0$*, continue et dérivable*

La périodicité en angle φ de la solution, permet d'exclure les valeurs propres négative conduisant à des fonctions exponentielles. Mais elle permet également de restreindre les valeurs de m, à des valeurs seulement entières.

$$\Phi''(\varphi) + \alpha_3\Phi(\varphi) = 0 \quad \alpha_3 = -m^2 \Rightarrow \Phi''(\varphi) - m^2\Phi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = e^{\pm m\varphi}$$

De même la condition de parité en ϑ implique une solution en variable de Cos(ϑ), et de plus la condition de continuité et dérivabilité en ϑ=0, exclut la fonction de Legendre de deuxième type qui diverge pour la valeur z=Cos(ϑ)=1, soit ϑ=0. De même la solution des fonctions de Legendre n'est possible que si les deux paramètres sont liés par la contrainte m<=n. C'est la raison pour laquelle la sommation sur m dans la série est étendue de -n à +n.

Par principe de superposition on recherche donc en général la solution sous la forme d'une série :

$$T(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0,+\infty}\ \sum_{m=-n,+n}\left(A_{n,m}r^{-(n+1)}+B_{n,m}r^{n}\right)P_n^m(Cos(\theta))\left(Ce^{im\varphi}+DCe^{-im\varphi}\right)$$

équivalent

$$T(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0,+\infty}\ \sum_{m=-n,+n}\left(A_{n,m}r^{-(n+1)}+B_{n,m}r^{n}\right)P_n^m(Cos(\theta))\left(CCos(m\varphi)+DSin(m\varphi)\right)$$

Et lorsque le problème ne dépend pas de l'angle azimutal φ :

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}\left(A_n r^{-(n+1)}+B_n r^{n}\right)P_n(Cos(\theta))$$

On verra que pour un cône sphérique que la solution s'écrit également sous la forme de série mais cette fois avec des degrés non entiers, par exemple pour un problème homogène de Dirichlet en $\vartheta=\vartheta_0$ et indépendant de l'angle φ

$$\lambda_n \textit{solution de l'équation } P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=0$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n=1,+\infty}\left(A_n r^{-(\lambda_n+1)}+B_n r^{\lambda_n}\right)P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

On exploite les relations d'orthogonalité et les formules intégrales comme suit :

$$z \to Cos(\theta) \Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\ P_n^m(z) P_l^m(z) = \int_0^{\pi} d\theta\ Sin(\theta) P_n^m(Cos(\theta)) P_l^m(Cos(\theta)) = \partial_{n,l} \frac{2}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

$$P_n^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{m/2} \frac{\partial^m P_n(z)}{\partial z^m} \quad P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$$

$$\Rightarrow P_n^m(-z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{\partial^m P_n(-z)}{\partial z^m} = (-1)^{n-m} (-1)^m (1-z^2)^{m/2} \frac{\partial^m P_n(z)}{\partial z^m} = (-1)^{n-m} P_n^m(z)$$

$$\Rightarrow P_n^m(-z) = (-1)^{n+m} P_n^m(z)$$

$$\int_{-1}^{1} dz\ P_n^m(z) = \int_0^{\pi} d\theta\ Sin(\theta)\ P_n^m(Cos(\theta)) = \frac{\left((-1)^m + (-1)^n\right) 2^{m-2}\ m\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!\ \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$

$$\int_{-1}^{1} dz\ P_n^m(z) = \int_0^{1} dz\ P_n^m(-z) + \int_0^{1} dz\ P_n^m(z) = (1 + (-1)^{n+m}) \int_0^{1} dz\ P_n^m(z)$$

$$= (-1)^m \left((-1)^m + (-1)^n\right) \int_0^{1} dz\ P_n^m(z) = (-1)^n \left((-1)^m + (-1)^n\right) \int_0^{1} dz\ P_n^m(z)$$

$$\int_0^{1} dz\ P_n^m(z) = \int_0^{\pi/2} d\theta\ Sin(\theta)\ P_n^m(Cos(\theta)) = \frac{(-1)^m 2^{-2m-1} \sqrt{\pi}\ m!\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1-m}{2}\right)}{\left(\frac{n+m}{2}\right)!\ \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

$\forall m, m' \in \mathbf{Z}$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\ e^{im\phi} e^{im'\phi} = 2\pi\ \partial_{m,m'} \Rightarrow \int_0^{2\pi} d\varphi\ e^{ip\phi} e^{ip'\phi} \int_0^{\pi} d\theta\ Sin(\theta) P_n^m(Cos(\theta)) P_l^m(Cos(\theta)) = \partial_{n,l} \partial_{p,p'} \frac{4\pi}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Notons par ailleurs les valeurs suivantes d'intégrales d'après la norme des fonctions propres

$$\int_{-1}^{1} dz \left(P_n^m(z)\right)^2 = \frac{2}{(2n+1)}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad et \quad P_n^m(-z) = (-1)^{n+m} P_n^m(z)$$

$$\int_{-1}^{1} dz \left(P_n^m(z)\right)^2 = \int_{0}^{1} dz \left(P_n^m(-z)\right)^2 + \int_{0}^{1} dz \left(P_n^m(z)\right)^2 = 2\int_{0}^{1} dz \left(P_n^m(z)\right)^2$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} dz \left(P_n^m(z)\right)^2 = \frac{1}{(2n+1)}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Lorsque les conditions aux limites sont indépendantes de l'angle azimutal φ, alors la solution ne dépend également plus de l'angle. Considérons un problème aux limites quelconque dans une sphère r,ϑ, alors selon le système de coordonnées sphériques et ses propriétés de symétrie, les contraintes sur la solution sont les suivantes :

$T(r,\theta)$ *fini*

$T(r,\theta)$ *fonction paire en* θ *soit* $T(r,-\theta) = T(r,\theta)$

$T(r,\theta)$ *ne comporte aucune singularité en* $\theta = 0$*, continue et dérivable*

Par principe de superposition on recherche la solution sous la forme d'une série :

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} \left(A_n r^{-(n+1)} + B_n r^n\right) P_n(Cos(\theta))$$

Des calculs de normes sur les polynômes de Legendre on peut également écrire (voir plus loin)

$$\int_{-1}^{1} dz \left(P_n(z)\right)^2 = \frac{2}{(2n+1)} \quad et \quad P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$$

$$\int_{-1}^{1} dz \left(P_n(z)\right)^2 = 2\int_{0}^{1} dz \left(P_n(z)\right)^2$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} dz \left(P_n(z)\right)^2 = \frac{1}{(2n+1)}$$

Les fonctions de Legendre possède également des formules de récurrence entre indices (entiers ou non entiers) voisins

$$(1) \quad P_\nu(z) = \frac{(2\nu+3)z}{(\nu+1)} P_{\nu+1}(z) - \frac{(\nu+2)}{(\nu+1)} P_{\nu+2}(z)$$

$$(2) \quad P_\nu(z) = \frac{(2\nu-1)z}{\nu} P_{\nu-1}(z) - \frac{(\nu-1)}{\nu} P_{\nu-2}(z)$$

$$(3) \quad \nu P_{\nu-1}(z) + (\nu+1) P_{\nu+1}(z) = (2\nu+1) z P_\nu(z)$$

$$(4) \quad Q_\nu(z) = \frac{(2\nu+3)z}{(\nu+1)} Q_{\nu+1}(z) - \frac{(\nu+2)}{(\nu+1)} Q_{\nu+2}(z)$$

$$(5) \quad Q_\nu(z) = \frac{(2\nu-1)z}{\nu} Q_{\nu-1}(z) - \frac{(\nu-1)}{\nu} Q_{\nu-2}(z)$$

$$(6) \quad \nu Q_{\nu-1}(z) + (\nu+1) Q_{\nu+1}(z) = (2\nu+1) z Q_\nu(z)$$

On exploite les relations d'orthogonalité et diverses propriétés qui s'écrivent :

$$z \to Cos(\theta) \Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\ P_n(z)P_l(z) = \int_0^{\pi} d\theta\ Sin(\theta)P_n(Cos(\theta))P_l(Cos(\theta)) = \frac{2}{(2n+1)}\partial_{nl}$$

$P_n(z)$ *base orthogonale des polynomes de degré* $\leq n$ *sur l'intervalle* $[-1,1]$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\ z^k P_n(z) = 0\ pour\ tout\ k < n$$

$$\int_{-1}^{1} dz\ z^k P_n(z) = \int_0^1 dz\ (-z)^k P_n(-z) + \int_0^1 dz\ z^k P_n(z) = (1+(-1)^{k-n})\int_0^1 dz\ z^k P_n(z)$$

$$\int_{-1}^{1} dz\ z^k P_n(z) = 0\ \forall k \in \mathbf{Z} / k-n\ impair\ ou\ (k-n\ pair\ et\ k<n)$$

$$\int_0^1 dz\ z^k P_n(z) = 0\ \forall k \in \mathbf{Z} / (k-n\ pair\ et\ k<n) \quad \int_{-1}^{1} dz\ z^n P_n(z) = \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!} \quad et \quad \int_0^1 dz\ z^n P_n(z) = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}$$

$$Si\ k-n\ pair\ et\ k>n \quad alors \int_{-1}^{1} dz\ z^k P_n(z) = \frac{2^{n+1} k! \left(\frac{k+n}{2}\right)!}{\left(\frac{k-n}{2}\right)!(k+n+1)!} \quad et \quad \int_0^1 dz\ z^k P_n(z) = \frac{2^n k! \left(\frac{k+n}{2}\right)!}{\left(\frac{k-n}{2}\right)!(k+n+1)!}$$

$$Il\ reste\ à\ déterminer\ pour\ k-n\ impair \int_0^1 dz\ z^k P_n(z);\ Pour\ k=0, \int_0^1 dz\ P_n(z) = 0\ si\ n\ pair\ et \int_0^1 dz\ P_n(z) \neq 0\ si\ n\ impa$$

$$L'intégrale\ indéfinie\ donne \int dz\ P_n(z) = \frac{P_{n+1}(z) - P_{n-1}(z)}{2n+1} \quad P_{n-1}(1) = P_{n+1}(1) = 1 \quad P_n(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow si\ n = 2m+1\ impair\ P_{2m+1}(0) = P_{2m-1}(0) = 0 \Rightarrow si\ n = 2m\ pair, P_{n+1}(0) = P_{n-1}(0) = 0$$

$$\Rightarrow si\ n\ impair\ P_{n-1}(0) \neq 0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad P_{n+1}(0) \neq 0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$

$$si\ n\ impair \quad \int_0^1 dz\ P_n(z) = \frac{1}{2n+1}[P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)] = \frac{\sqrt{\pi}}{2n+1}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\right]$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2^{1-n}\sqrt{\pi}(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \quad \Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^n \sqrt{\pi}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!}$$

$$\Rightarrow si\ n \to 2n+1\ alors\ \Gamma\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^{2n-1}\sqrt{\pi}(n-1)!}{(2n-1)!} \quad \Gamma\left(-\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1}\sqrt{\pi}\, n!}{(2n+1)!}$$

$$\int_0^1 dz\ P_{2n+1}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{4n+3}\left[\frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!\sqrt{\pi}} - \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!\sqrt{\pi}}\right] = \frac{(-1)^n}{4n+3}\left[\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!} + \frac{(2n-1)!\,2n(2n+1)}{2^{2n-1}4(n+1)n(n-1)!n!}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n(2n-1)!}{(4n+3)\,2^{2n-1}(n-1)!n!}\left[1 + \frac{(2n+1)}{2(n+1)}\right] \Rightarrow \int_0^1 dz\ P_{2n+1}(z) = \frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!} = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(n+1)}$$

Exemple : Problème intérieur, sphère pleine (r,ϑ,φ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $r=l_r$ ne dépendant que de l'angle ϑ et pas de l'angle azimutal φ

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

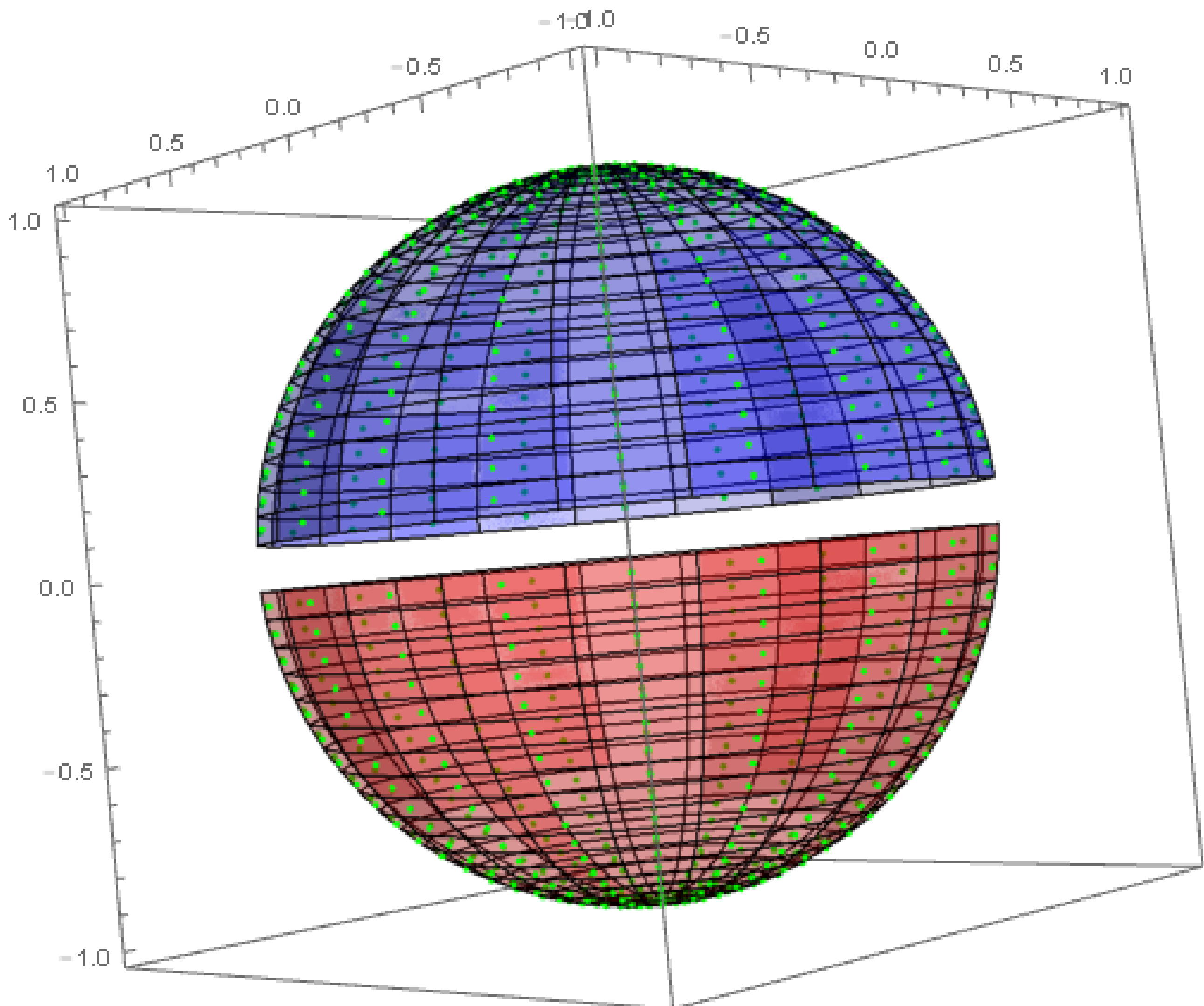
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=1-Heaviside(\theta-\pi/2) \quad \textit{fonction de Heaviside}$$

$$T(r,\theta)\ \textit{fini}$$

La solution est indépendante de φ et se développe en série de polynôme de Legendre

$$T(r,\theta)=C+\frac{D}{r}+\sum_{n=1,+\infty}\left(A_n r^{-(n+1)}+B_n r^n\right)P_n(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}\left(A_n r^{-(n+1)}+B_n r^n\right)P_n(Cos(\theta)) \quad \textit{en posant } P_0(z)=1 \quad (\textit{également orthogonal à } P_n(z))$$



La condition de finitude implique que A_n=0 d'où :

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}B_n r^n\ P_n(Cos(\theta))\quad \|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}dz\ P_n(z)^2=\int_0^{\pi}d\theta\ Sin(\theta)\ P_n(Cos(\theta))^2=\frac{2}{(2n+1)}$$

$$C.L.\quad T(r,\theta,\varphi)\big|_{r=l_r}=1-Heaviside(\theta-\pi/2)\quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$\Rightarrow B_0=\frac{1}{2}\quad et\quad B_n=\frac{\int_0^{\pi/2}d\theta\ Sin(\theta)\ P_n(Cos(\theta))}{l_r{}^n\|P_n\|^2}=\frac{(2n+1)\int_0^1 dz\ P_n(z)}{2l_r{}^n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2l_r{}^n}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\right]$$

$$B_{2m}=0\quad B_{2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2l_r{}^{2n+1}}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)\Gamma(n+1)}-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-1-2n}{2}\right)\Gamma(n+2)}\right]$$

$$B_{2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2l_r{}^{2n+1}}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)n!}-\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-n\right)(n+1)!}\right]$$

$$\Gamma(n)=(n-1)!\quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{2^{1-n}\sqrt{\pi}\,(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\quad \Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}2^n\sqrt{\pi}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!}$$

$$\Rightarrow\Gamma\left(-\frac{2n-1}{2}\right)=\frac{(-1)^n 2^{2n-1}\sqrt{\pi}(n-1)!}{(2n-1)!}\quad \Gamma\left(-\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}\sqrt{\pi}n!}{(2n+1)!}$$

$$B_{2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2l_r{}^{2n+1}}\left[\frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!\sqrt{\pi}}-\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!\sqrt{\pi}}\right]=\frac{(-1)^n}{2l_r{}^{2n+1}}\left[\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}+\frac{(2n-1)!\,2n(2n+1)}{2^{2n-1}4(n+1)n(n-1)!n!}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n}{2l_r{}^{2n+1}}\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}\left[1+\frac{(2n+1)}{2(n+1)}\right]\Rightarrow B_{2n+1}=\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{l_r{}^{2n+1}2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}$$

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Lorsque les conditions aux limites sont inversées, soit

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta,\varphi)\ fini$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=Heaviside(\theta-\pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

Alors la solution est de la forme :

$$\Rightarrow B_0=\frac{1}{2} \quad et \quad B_n=\frac{\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\ Sin(\theta)\ P_n\left(Cos(\theta)\right)}{l_r^{\ n}\left\|P_n\right\|^2}=\frac{(2n+1)\int_0^{-1} dz\ P_n(z)}{2l_r^{\ n}}=-(-1)^n\ \frac{(2n+1)\int_0^{1} dz\ P_n(z)}{2l_r^{\ n}}$$

$$\Rightarrow B_{2n}=0 \quad et \quad B_{2n+1}=-\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{l_r^{\ 2n+1}2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}$$

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2}-\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}(-1)^n\ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ \frac{(4n+3)}{2(n+1)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Supposons maintenant que les hémisphères supérieure et inférieure soit à des températures différentes respectivement T_0 et T_1. Alors par principe de superposition nous avons :

$$T(r,\theta)=T_0\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(Cos(\theta))\right)+$$
$$T_1\left(\frac{1}{2}-\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(Cos(\theta))\right)$$

$$T(r,\theta)=\frac{T_0+T_1}{2}+\left(T_0-T_1\right)\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(r,\theta)=\frac{T_0+T_1}{2}+\frac{\left(T_0-T_1\right)}{2}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}(-1)^n\ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ \frac{(4n+3)}{2(n+1)}\ P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Si T_0 =1 et T_1=-1 alors

$$T(r,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}(-1)^n\ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ \frac{(4n+3)}{2(n+1)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

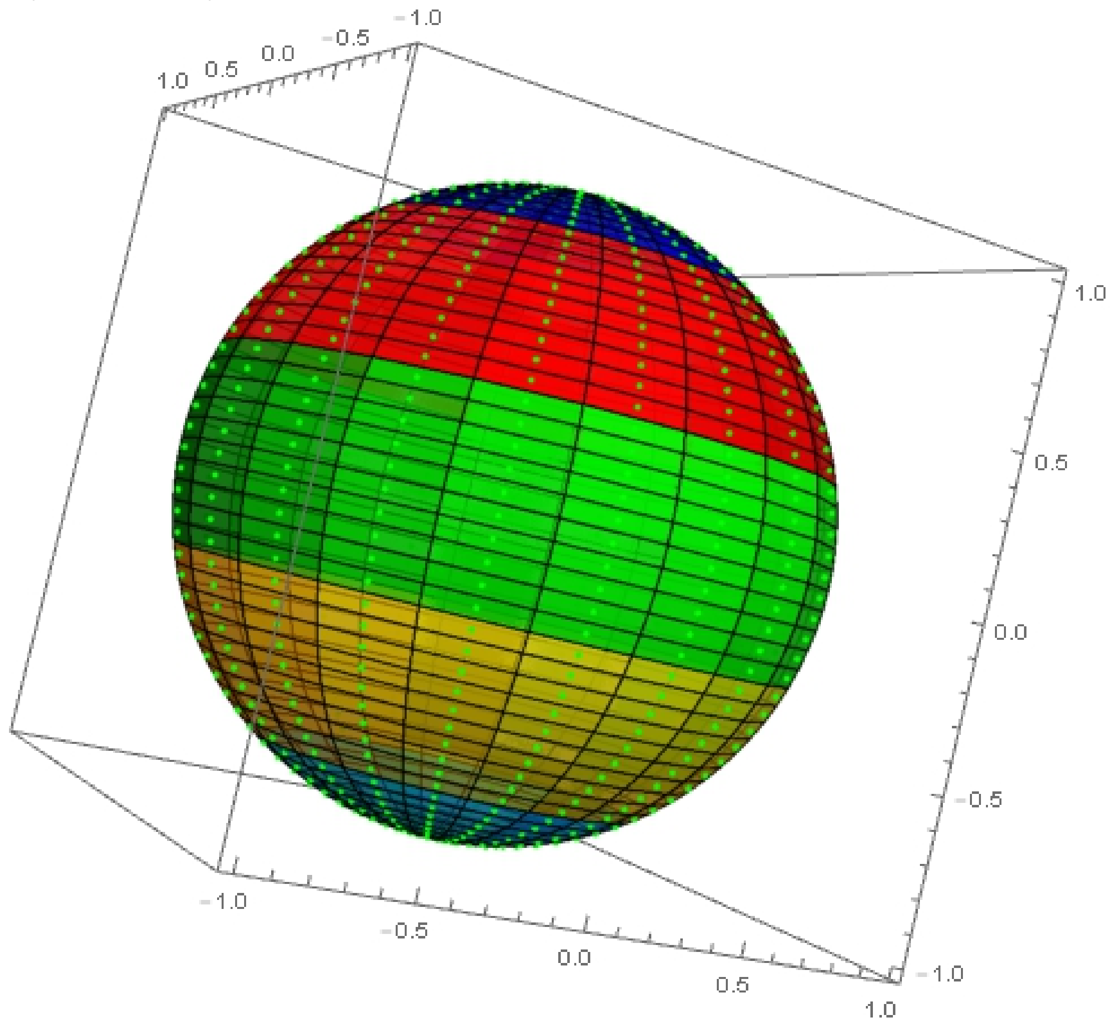
Pour le problème plus général :

$\Delta T(r,\theta)=0$

$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(\theta)$

$T(r,\theta)$ *fini*

Ici les couleurs sur la sphère figurent la variabilité des conditions aux limites en ϑ et indépendante de φ



La solution s'écrit :

$$B_0=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta) \quad B_n=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)\ P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty} B_n\,\frac{(2n+1)}{2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n(Cos(\theta))$$

Si le problème s'exprime sous la forme :

$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini$

$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$z=Cos(\theta) \quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n(Cos(\theta))$$

Voyons quelle est la solution lorsque la condition aux limites est paire : $f_\theta(Cos(\theta))=f_\theta(Cos(\pi-\theta))=f_\theta(-Cos(\theta))$. Avec la variable z $f_\theta(z)=f_\theta(-z)$. Cette symétrie se traduit également par la symétrie des conditions aux limites entre les deux hémisphères.

La solution s'écrit alors :

$$z=Cos(\theta) \quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)=2\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)$$

$$B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)=\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)+\int_{-1}^{0}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)=\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)-\int_{1}^{0}dz\ f_\theta(-z)\ P_n(-z)$$

$$B_n=(1+(-1)^n)\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)\Rightarrow B_{2l+1}=0 \quad B_{2l}=2\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{2l}(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{l=1,+\infty}B_{2l}\frac{(4l+1)}{2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l} P_{2l}(Cos(\theta))$$

$$f_\theta(z)=1\Rightarrow B_{2l}=0\Rightarrow T(r,\theta)=1$$

Lorsque la condition aux limites est impaire : $f_\theta(Cos(\theta))=-f_\theta(Cos(\pi-\theta))$. Avec la variable z $f_\theta(z)=-f_\theta(-z)$, la solution s'écrit alors :

$$z=Cos(\theta) \quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)=0$$

$$B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)=\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)+\int_{-1}^{0}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)=\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)-\int_{1}^{0}dz\ f_\theta(-z)\ P_n(-z)$$

$$B_n=(1-(-1)^n)\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)\Rightarrow B_{2l}=0 \quad B_{2l+1}=2\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{2l+1}(z)$$

$$T(r,\theta)=\sum_{l=0,+\infty}B_{2l+1}\frac{(4l+3)}{2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(Cos(\theta))$$

.

Exemple : Problème intérieur et extérieur, sphère pleine (r,ϑ,φ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en r=l_r ne dépendant que de l'angle ϑ et pas de l'angle azimutal φ

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad r\in\left[l_r,+\infty\right[$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(\theta)$$

$$T(r,\theta)\ fini$$

La solution est indépendante de φ et se développe en série de polynôme de Legendre

$$T(r,\theta)=C+\frac{D}{r}+\sum_{n=1,+\infty}\left(A_n r^{-(n+1)}+B_n r^n\right)P_n(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}\left(A_n r^{-(n+1)}+B_n r^n\right)P_n(Cos(\theta)) \quad en\ posant\ P_0(z)=1 \quad (également\ orthogonal\ à\ P_n(z))$$

Avec la condition de finitude de la solution à l'infini, il vient facilement :

$$z=Cos(\theta) \quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{n+1}P_n(Cos(\theta))$$

En continuité la solution à l'intérieur de la sphère est :

$$z=Cos(\theta) \quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{n}P_n(Cos(\theta))$$

<u>Application à un problème d'électrostatique</u> *: soit une charge électrique placée au dessus d'une sphère conductrice à la distance b du centre de la sphère de rayon a, toujours à l'intérieur (b<a), qui induit une répartition de charge sur la surface. La sphère étant conductrice la charge induit une répartition de charges opposées sur la surface de la sphère. Cette dernière se trouve alors placée au potentiel nul sur la surface de la sphère. Quel est le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère chargée ? Attention, il y a un piège, l'équation à l'intérieur de la sphère est une équation de Poisson, car il y a un terme source (la charge électrique), tandis qu'à l'extérieur c'est une équation de Laplace (sans terme source). Le principe du maximum et du minimum s'applique à l'extérieur mais pas à l'intérieur. C'est la raison pour laquelle le potentiel à l'intérieur n'est pas identiquement nul tandis que celui à l'extérieur l'est.*

Le potentiel crée par la charge électrique est de la forme :

$$T(r,\theta)=\frac{q}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r'}\|}=\frac{q}{\sqrt{\mathbf{r}^2+\mathbf{r'}^2-2\mathbf{r}.\mathbf{r'}}}=\frac{q}{\sqrt{l_r^{\,2}+b^2-2l_r bCos(\Theta)}}$$

Les distances en coordonnées sphériques se développe en série des fonctions propres angulaires :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x'^2-2xx'Cos(\Theta)}}=\frac{1}{x}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{x'}{x}\right)^n P_n(Cos(\Theta))$$

$$x\to l_r \quad x'\to b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{l_r^{\,2}+b^2-2l_r bCos(\Theta)}}=\frac{1}{l_r}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{l_r}\right)^n P_n(Cos(\Theta))$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x'^2+2xx'Cos(\Theta)}}=\frac{1}{x}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\left(\frac{x'}{x}\right)^n P_n(Cos(\Theta))$$

L'angle étant celui entre les deux vecteurs x et x'. Cette angle ici puisque la charge est placée sur l'axe z à la distance b de l'origine a un angle nul et l'angle entre les deux vecteurs se confond donc avec l'angle ϑ du système de coordonnées sphériques. Afin de ramener les deux problèmes à un problème de Laplace, on tire parti du potentiel à la surface, et l'on recherche les solutions des problèmes intérieur (Poisson) et extérieur (Laplace) sous la forme de l'addition du potentiel de la charge électrique et d'un potentiel $U(r,\vartheta)$. De cette façon le nouveau potentiel $U(r,\vartheta)$devient solution d'un problème strictement de Laplace :

$$T(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2r\,bCos(\theta)}}+U(r,\theta)$$

$$Intérieur \quad U(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}A_n\left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n(Cos(\theta)) \quad U(r,\theta)\big|_{r=l_r}=-\frac{q}{l_r}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{l_r}\right)^n P_n(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow A_n=-\frac{1}{l_r}\left(\frac{b}{l_r}\right)^n \Rightarrow U(r,\theta)=-\frac{q}{l_r}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{br}{l_r^{\,2}}\right)^n P_n(Cos(\theta)) \quad T(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2r\,bCos(\theta)}}-\frac{q}{l_r}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{br}{l_r^{\,2}}\right)^n P_n(Cos$$

$$Posons\ x\to l_r \quad x'\to\frac{br}{l_r}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+x'^2-2xx'Cos(\theta)}}=\frac{1}{l_r}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{br}{l_r^{\,2}}\right)^n P_n(Cos(\theta))=\frac{1}{\sqrt{l_r^{\,2}+\left(\frac{br}{l_r}\right)^2-2brCos(\theta)}}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2r\,bCos(\theta)}}-\frac{q}{\sqrt{l_r^{\,2}+\left(\frac{br}{l_r}\right)^2-2brCos(\theta)}}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2r\,bCos(\theta)}}-\frac{ql_r}{b}\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(\frac{l_r^{\,2}}{b}\right)^2-2r\frac{l_r^{\,2}}{b}Cos(\theta)}}$$

$$Extérieur \quad U(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}B_n\left(\frac{l_r}{r}\right)^{n+1} P_n(Cos(\theta)) \quad U(r,\theta)\big|_{r=l_r}=-\frac{q}{l_r}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{l_r}\right)^n P_n(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow B_n=-\frac{1}{l_r}\left(\frac{b}{l_r}\right)^n \Rightarrow U(r,\theta)=-\frac{q}{l_r}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{l_r}\right)^n\left(\frac{l_r}{r}\right)^{n+1} P_n(Cos(\theta))=-\frac{q}{r}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{r}\right)^n P_n(Cos(\theta))$$

$$Posons\ x\to r \quad x'\to b\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+x'^2-2xx'Cos(\theta)}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{b}{r}\right)^n P_n(Cos(\theta))=\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2-2rbCos(\theta)}}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2r\,bCos(\theta)}}-\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rbCos(\theta)}}=0$$

On retrouve bien le fait que le potentiel à l'extérieur est nul du fait des conditions aux limites nulles du problème. On retrouve pour le problème intérieur la solution donnée à l'aide de la méthode de images électriques pour la sphère conductrice, soit un dipôle constitué par la charge électrique de départ placée à la distance b et une charge de signe opposé placée sur le même axe à la distance l_r^2/b du centre de la sphère et de charge $-ql_r/b$.

L'équation de Laplace en coordonnées sphériques :

$$\Delta T(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sin(\theta)\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial^2 T(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

est invariante par la transformation r'->R2/r :

$$Si\ T(r,\theta,\varphi)\ solution\ de\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sin(\theta)\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial^2 T(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$Alors\ U(r,\theta,\varphi)=\frac{R}{r}T\left(\frac{R^2}{r},\theta,\varphi\right)est\ également\ solution\ \Delta U(r,\theta,\varphi)=\Delta_r U(r,\theta,\varphi)+\Delta_{\theta,\varphi}U(r,\theta,\varphi)=0$$

$$Notons\ \Delta=\Delta_r+\Delta_{\theta,\varphi}\quad et\quad sachant\ que\ \Delta T(r',\theta,\varphi)=\Delta_{r'}T(r',\theta,\varphi)+\Delta_{\theta,\varphi}T(r',\theta,\varphi)=0$$

$$Posons\ r'=\frac{R^2}{r}\quad\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial r}=-\frac{R}{r^2}T(r',\theta,\varphi)+\frac{R}{r}\frac{dr'}{dr}\frac{\partial T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'}=-\frac{R}{r^2}T(r',\theta,\varphi)-\frac{R^3}{r^3}\frac{\partial T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'}$$

$$r^2\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial r}=-RT(r',\theta,\varphi)-\frac{R^3}{r}\frac{\partial T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right)=-R\frac{\partial}{\partial r}\left(T(r',\theta,\varphi)+\frac{R^2}{r}\frac{\partial T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'}\right)=-R\left(-2\frac{R^2}{r^2}\frac{\partial T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'}-\frac{R^4}{r^3}\frac{\partial^2 T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'^2}\right)$$

$$=\frac{R^3}{r^2}\left(2\frac{\partial T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'}+r'\frac{\partial^2 T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'^2}\right)=\frac{R}{r}\left(2r'\frac{\partial T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'}+r'^2\frac{\partial^2 T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'^2}\right)$$

$$\Delta_r U=\frac{r'^3}{R^5}\left(2r'\frac{\partial T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'}+r'^2\frac{\partial^2 T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'^2}\right)=\frac{r'^5}{R^5}\frac{1}{r'^2}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial T(r',\theta,\varphi)}{\partial r'}\right)=\frac{r'^5}{R^5}\Delta_{r'}T(r',\theta,\varphi)$$

$$\Delta_{\theta,\varphi}U(r,\theta,\varphi)=\frac{r'^5}{R^5}\Delta_{\theta,\varphi}T(r',\theta,\varphi)\Rightarrow\Delta_r U+\Delta_{\theta,\varphi}U(r,\theta,\varphi)=\frac{r'^5}{R^5}\left(\Delta_{r'}T(r',\theta,\varphi)+\Delta_{\theta,\varphi}T(r',\theta,\varphi)\right)=0\quad c.q.f.d.$$

.

Ce qui confirme le résultat de la construction de la solution à l'aide de la méthode des images en électrostatique.

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, sphère dans un champ électrique uniforme axe z, portée au potentiel 0

En utilisant le développement en série de polynôme de Legendre, avec la forme requise du potentiel à l'infini, la solution doit être de la forme :

$$T(r,\vartheta)\big|_{r=r_0}=0\quad \underset{r\to+\infty}{Lim}T(r,\vartheta)=-E_0z=-E_0rCos(\vartheta)\quad T(r,\vartheta)=-E_0rCos(\vartheta)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A_n}{r^{n+1}}P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow P_1(Cos(\vartheta))=Cos(\vartheta)\Rightarrow T(r,\vartheta)=\frac{A_1}{r^2}-E_0rCos(\vartheta)$$

$$\Rightarrow\frac{A_1}{r_0^{\ 2}}-E_0r_0=0\Rightarrow A_1=E_0r_0^{\ 3}\Rightarrow T(r,\vartheta)=E_0r_0Cos(\vartheta)\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^2-\frac{r}{r_0}\right)$$

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, sphère dans un champ électrique uniforme axe z, portée au potentiel V0

Cette fois la sphère est au potentiel V0, on rajoute le terme en 1/r à la solution précédente :

$$T(r,\vartheta) = E_0 r_0 Cos(\vartheta)\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{r}{r_0}\right) + V_0\frac{r_0}{r}$$
.

et dans ce cas il y a les deux termes des polynômes de Legendre P0 et P1

Exemple gravitationnel: problème intérieur et extérieur Poisson/Dirichlet, champ gravitationnel interne et externe à une sphère, homogénéisation de l'équation de poisson

En utilisant le développement en série de polynôme de Legendre, avec la forme requise du potentiel à l'infini, la solution doit être de la forme :

$$\textit{Intérieur} \quad \textit{Poisson} \quad \Delta T_{\text{int}}(r,\theta,\varphi) = Q_0 = -4\pi\rho \quad T_{\text{int}}(r,\theta,\varphi) = T_{\text{int}}(r)$$

$$\textit{Extérieur} \quad \textit{Laplace} \quad \Delta T_{ext}(r,\theta,\varphi) = 0 \quad T_{ext}(r,\theta,\varphi) = T_{ext}(r)$$

$$T_{\text{int}}(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=r_0} = T_{ext}(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=r_0} \quad \frac{\partial}{\partial\vec{n}}T_{\text{int}}(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=r_0} = \frac{\partial}{\partial\vec{n}}T_{ext}(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=r_0} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r}T_{\text{int}}(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=r_0} = \frac{\partial}{\partial r}T_{ext}(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=r_0}$$

$$\Delta T_{\text{int}}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}T_{\text{int}}(r)\right) \Rightarrow \Delta T_{\text{int}}^{part}(r) = Q_0 \Rightarrow T_{\text{int}}^{part}(r) = \frac{Q_0 r^2}{6} = -2\pi\rho\frac{r^2}{3}$$

$$T_{\text{int}}(r) = T_{\text{int}}^{part}(r) + T_{\text{int}}^{\text{hom}}(r) \Rightarrow \Delta T_{\text{int}}^{\text{hom}}(r) = 0 \Rightarrow \textit{homogénéisation de l'équation de Poisson}$$
.

L'homogénéisation de l'équation de poisson, conduit par le respect des conditions de continuité aux expressions suivantes et les solutions intérieure et extérieure de l'équation :

$$T_{\text{int}}(r) = \frac{Q_0 r^2}{6} + Ar \quad T_{ext}(r) = \frac{B}{r} \qquad \frac{Q_0 r_0^2}{6} + Ar_0 = \frac{B}{r_0} \quad \frac{Q_0 r_0}{3} + A = -\frac{B}{r_0^2}$$

$$A = -\frac{B}{r_0^2} - \frac{Q_0 r_0}{3} \Rightarrow B = \frac{Q_0 r_0^3}{6} + Ar_0^2 = \frac{Q_0 r_0^3}{6} - \left(\frac{B}{r_0^2} + \frac{Q_0 r_0}{3}\right)r_0^2$$
..

$$2B = -\frac{Q_0 r_0^3}{6} \Rightarrow B = -\frac{Q_0 r_0^3}{12} \quad A = -\frac{B}{r_0^2} - \frac{Q_0 r_0}{3} = \frac{Q_0 r_0}{12} - \frac{4Q_0 r_0}{12} = -\frac{Q_0 r_0}{4}$$

$$T_{\text{int}}(r) = \frac{Q_0 r^2}{6} + Ar = \frac{Q_0 r^2}{6} - \frac{Q_0 r_0 r}{4} = \frac{Q_0 r_0^2}{2}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{r}{r_0}\right) = \pi\rho r_0^2\left(\frac{r}{r_0} - \frac{2}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

$$T_{ext}(r) = -\frac{Q_0 r_0^3}{12r} = -\frac{Q_0 r_0^2}{12}\frac{r_0}{r} = \frac{\pi\rho r_0^2}{3}\frac{r_0}{r} \Rightarrow T_{\text{int}}(r_0) = T_{ext}(r_0) = \frac{\pi\rho r_0^2}{3}$$

Fonction génératrice des polynômes de Legendre et des fonctions associées de Legendre

La fonction génératrice des polynômes de Legendre est définie telle que le développement de Taylor autour de l'origine donne les polynômes de Legendre :

$$G(z,t) = \sum_{n=0,+\infty} t^n P_n(z)$$

On peut montrer que la fonction génératrice est la suivante :

$$G(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2zt}} = \sum_{n=0,+\infty} t^n P_n(z) \quad z \in]-1,1[\quad et \quad |t|<1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} dz \frac{P_n(z)}{\sqrt{1+t^2-2zt}} = \frac{2t^n}{2n+1}$$

la formule donne alors :

$$\frac{a}{a\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}-2z\frac{t}{a}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2-2zat}} = \sum_{n=0,+\infty} \left(\frac{t}{a}\right)^n P_n(z)$$

$$z = Cos(\theta) \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2-2zat}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2-2atCos(\theta)}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2-2atCos(\theta)}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0,+\infty} \left(\frac{t}{a}\right)^n P_n(Cos(\theta))$$

.

La fonction génératrice des fonctions de Legendre de deuxième espèce est la suivante :

$$G(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2zt}} Log\left(\frac{z-t+\sqrt{1+t^2-2zt}}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \sum_{n=0,+\infty} t^n Q_n(z) \quad z \in]-1,1[\quad et \quad |t|>1$$

La fonction génératrice des fonctions associées de Legendre est la suivante :

$$P_n^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m} \quad P_n^m(z) = \frac{(-1)^{m+n}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}(1-z^2)^n}{dz^{m+n}}$$

$$G_L(z,t) = \frac{1}{(1+t^2-2zt)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0,+\infty} t^n P_n(z) \quad G_m(z,t) = (-1)^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m G_L(z,t)}{dz^m}$$

$$= (-1)^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{t^m}{(1+t^2-2zt)^{m+\frac{1}{2}}} = (-1)^m (2m-1)!!(1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{t^m}{(1+t^2-2zt)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0,+\infty} t^n P_n^m(z)$$

On peut aussi écrire puisque $P_n^m(z) \equiv 0 \quad n<m \quad n,m \in \mathbf{N}$

$$\Rightarrow (1-z^2)^{\frac{m}{2}} (-1)^m \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{t^m}{(1+t^2-2zt)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=m,+\infty} t^n P_n^m(z)$$

Les fonctions associés de Legendre d'ordre négatif sont définis ainsi :

$$P_n^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_n^m(z)$$

En coordonnées sphérique la distance entre deux points s'exprime comme suit :

$$\mathbf{x}(r,\theta,\varphi) \quad \mathbf{x}'(r',\theta',\varphi') \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\| = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'(Cos(\theta-\theta')+Sin(\theta)Sin(\theta')(Cos(\varphi-\varphi')-1))}$$

$$\Theta \text{ angle entre } \mathbf{x},\mathbf{x}' \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\| = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'Cos(\Theta)}$$

$$Cos(\Theta) = Cos(\theta-\theta') + Sin(\theta)Sin(\theta')(Cos(\varphi-\varphi')-1)$$

Dans le même plan azimutal $\rightarrow \varphi = \varphi'$

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\| = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'Cos(\theta-\theta')}$$

.

Ce qui conduit à la formule pour les puissances négatives impaires de la distance entre deux points dans un même plan azimutal:

$$(2m-1)!!\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^m t^m}{\left(1+t^2-2zt\right)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0,+\infty} t^n P_n^m(z) \rightarrow t = \frac{x'}{x} \quad (2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dz \frac{P_n^m(z)\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}}{\left(1+t^2-2zt\right)^{m+\frac{1}{2}}} = (-1)^m t^{n-m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2^{m+1} m!}{(2m)!(2n+1)}$$

$$\Rightarrow (2m-1)!!\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^m x'^m x^{m+1}}{\left(x^2+x'^2-2zxx'\right)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0,+\infty} t^n P_n^m\left(\frac{x'}{x}\right) \quad Posons \quad z = Cos(\theta-\theta')$$

$$Sin^m(\theta-\theta') \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{(-1)^m x'^m x^{m+1}}{\left(x^2+x'^2-2xx' Cos(\theta-\theta')\right)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0,+\infty} \left(\frac{x'}{x}\right)^n P_n^m(Cos(\theta-\theta'))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(x^2+x'^2-2xx' Cos(\theta-\theta')\right)^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{2^m m!(-1)^m}{(2m)! Sin^m(\theta) x'^m x^{m+1}} \sum_{n=0,+\infty} \left(\frac{x'}{x}\right)^n P_n^m(Cos(\theta-\theta'))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x'}\|^{2m+1}} = \frac{2^m m!(-1)^m}{(2m)! Sin^m(\theta-\theta') x^{m+1} x'^m} \sum_{n=0,+\infty} \left(\frac{x'}{x}\right)^n P_n^m(Cos(\theta-\theta'))$$

$$Cas\ particulier\ m=0 \quad \frac{2^m m!}{(2m)!} = \frac{1}{(2m-1)!!} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x'}\|} = \frac{1}{x} \sum_{n=0,+\infty} \left(\frac{x'}{x}\right)^n P_n(Cos(\theta-\theta'))$$

Existe-t-il une formule similaire pour les puissances positives impaires de la distance entre deux points ?

Séries calculées à l'aide de la fonction génératrice des polynômes de Legendre

En intégrant terme à terme la fonction génératrice sur la variable t, on peut sans grande difficulté calculer des séries :

$$G(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xy}}=\sum_{n=0,+\infty} x^n P_n(y) \quad |x|<1 \quad et \quad |y|<1$$

$$\Rightarrow \int_0^t dx\, G(x,y)=\sum_{n=0,+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}P_n(y)=\int_0^x dt\,\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2ty}}=Log\left(\frac{x-y+\sqrt{1+x^2-2xy}}{1-y}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0,+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}P_n(y)=\int_0^x dt\,\frac{t}{\sqrt{1+t^2-2ty}}=\sqrt{1+x^2-2xy}-1+yLog\left(\frac{x-y+\sqrt{1+x^2-2xy}}{1-y}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0,+\infty}\frac{x^{n+3}}{n+3}P_n(y)=\int_0^x dt\,\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2-2ty}}=\frac{(x+3y)\sqrt{1+x^2-2xy}-3y-(1-3y^2)Log\left(\frac{x-y+\sqrt{1+x^2-2xy}}{1-y}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0,+\infty}\frac{x^{n+4}}{n+4}P_n(y)=\int_0^x dt\,\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2-2ty}}=\frac{\left\{\begin{array}{l}4-15y^2-(4-2x^2-5xy-15y^2)\sqrt{1+x^2-2xy}-\\-3y(3-5y^2)Log\left(\frac{x-y+\sqrt{1+x^2-2xy}}{1-y}\right)\end{array}\right\}}{6}$$

De même avec un paramètre h quelconque (voir S.Mottin « An analytical solution of the Laplace equation with Robin conditions applying Legendre transform ») :

$$\sum_{n=0,+\infty}\frac{x^{n+h}}{n+h}P_n(y)=\int_0^x dt\,\frac{t^{h-1}}{\sqrt{1+t^2-2ty}}=x^h\int_0^1 d\tau\,\frac{\tau^{h-1}}{\sqrt{1+x^2\tau^2-2xy\tau}}$$

On arrive immédiatement à l'aide de Mathematica, notamment, mais on peut également le calculer à la main à partir de la représentation intégrale de la fonction de Appell :

$$\int_0^1 d\tau\,\frac{\tau^{h-1}}{\sqrt{1+x^2\tau^2-2xy\tau}}=\frac{AppelF_1\left(h,\frac{1}{2},\frac{1}{2};h+1;x\left(y+\sqrt{y^2-1}\right),x\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)\right)}{h}$$

$$AppellF_1(a,b_1,b_2;c;x;y)=\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b_1+m)}{\Gamma(b_1)}\frac{\Gamma(b_2+n)}{\Gamma(b_2)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m+n)}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

$$AppellF_1(a,b_1,b_2;c;x;y)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}\int_0^1 dt\, t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tx)^{-b_1}(1-ty)^{-b_2}$$

.

Compte tenu du contexte en x, y |x|<=1 et |y|<=1, l'expression s'écrit :

$$\int_0^1 d\tau\,\frac{\tau^{h-1}}{\sqrt{1+x^2\tau^2-2xy\tau}}=\frac{AppelF_1\left(h,\frac{1}{2},\frac{1}{2};h+1;x\left(y+i\sqrt{1-y^2}\right),x\left(y-i\sqrt{1-y^2}\right)\right)}{h}$$

.

Calculons cette intégrale sans l'aide de Mathematica :

$$x^2\tau^2 - 2xy\tau + 1 = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{y \pm \sqrt{y^2-1}}{x} \Leftrightarrow 1 + x^2\tau^2 - 2xy\tau = \left(\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)-x\tau\right)\left(\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)-x\tau\right)$$

$$De\ plus \quad y+\sqrt{y^2-1} = \frac{1}{y-\sqrt{y^2-1}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 d\tau \, \frac{\tau^{h-1}}{\sqrt{1+x^2\tau^2-2xy\tau}} = \int_0^1 d\tau \, \frac{\tau^{h-1}}{\sqrt{\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)-x\tau}\sqrt{\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)-x\tau}} = \int_0^1 d\tau \, \frac{\tau^{h-1}}{\sqrt{1-\frac{x\tau}{y+\sqrt{y^2-1}}}\sqrt{1-\frac{x\tau}{y-\sqrt{y^2-1}}}}$$

$$Posons \quad \varsigma_1 = \frac{x}{y+\sqrt{y^2-1}} = x\left(y-\sqrt{y^2-1}\right) \quad \varsigma_2 = \frac{x}{y-\sqrt{y^2-1}} = x\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) \quad et \quad a = h \quad c = a+1 = h+1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 d\tau \, \frac{\tau^{h-1}}{\sqrt{1-\varsigma_1\tau}\sqrt{1-\varsigma_2\tau}} = \int_0^1 d\tau \, \tau^{h-1}(1-\varsigma_1\tau)^{-\frac{1}{2}}(1-\varsigma_2\tau)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 d\tau \, \frac{\tau^{h-1}}{\sqrt{1+x^2\tau^2-2xy\tau}} = \frac{\Gamma(1)\Gamma(h)}{\Gamma(h+1)} AppellF_1\left(h,\frac{1}{2},\frac{1}{2};h+1;\varsigma_1;\varsigma_2\right) = \frac{AppellF_1\left(h,\frac{1}{2},\frac{1}{2};h+1;\varsigma_1;\varsigma_2\right)}{h} \qquad c.q.f.d$$

Ce qui conduit au résultat suivant, qui n'a d'ailleurs rien de nouveau en ce qui concerne l'intégrale, ni concernant la solution analytique en série du problème aux limites de Robin sur la sphère (notons une erreur de calcul dans l'article de S.Mottin) :

$$\forall h \in \mathbf{R}^+ \sum_{n=0,+\infty} \frac{x^{n+h}}{n+h} P_n(y) = \frac{x^h}{h} AppelF_1\left(h,\frac{1}{2},\frac{1}{2};h+1;x\left(y+i\sqrt{1-y^2}\right),x\left(y-i\sqrt{1-y^2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0,+\infty} \frac{x^n}{n+h} P_n(y) = \frac{AppelF_1\left(h,\frac{1}{2},\frac{1}{2};h+1;x\left(y+i\sqrt{1-y^2}\right),x\left(y-i\sqrt{1-y^2}\right)\right)}{h}$$

On en déduit immédiatement ceci par des calculs simples :

$$\sum_{n=0,+\infty} \frac{n}{n+h} x^n P_n(y) = \sum_{n=0,+\infty} x^n P_n(y) - h \sum_{n=0,+\infty} \frac{x^n}{n+h} P_n(y)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0,+\infty} \frac{n}{n+h} x^n P_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xy}} - AppelF_1\left(h,\frac{1}{2},\frac{1}{2};h+1;x\left(y+i\sqrt{1-y^2}\right),x\left(y-i\sqrt{1-y^2}\right)\right)$$

$$\sum_{n=0,+\infty} \frac{2n+1}{2} \frac{x^n}{n+h} P_n(y) = \sum_{n=0,+\infty} n \frac{x^n}{n+h} P_n(y) + \frac{1}{2} \sum_{n=0,+\infty} \frac{x^n}{n+h} P_n(y)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0,+\infty} \frac{2n+1}{2} \frac{x^n}{n+h} P_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xy}} + \frac{1-2h}{h} AppelF_1\left(h,\frac{1}{2},\frac{1}{2};h+1;x\left(y+i\sqrt{1-y^2}\right),x\left(y-i\sqrt{1-y^2}\right)\right)$$

.

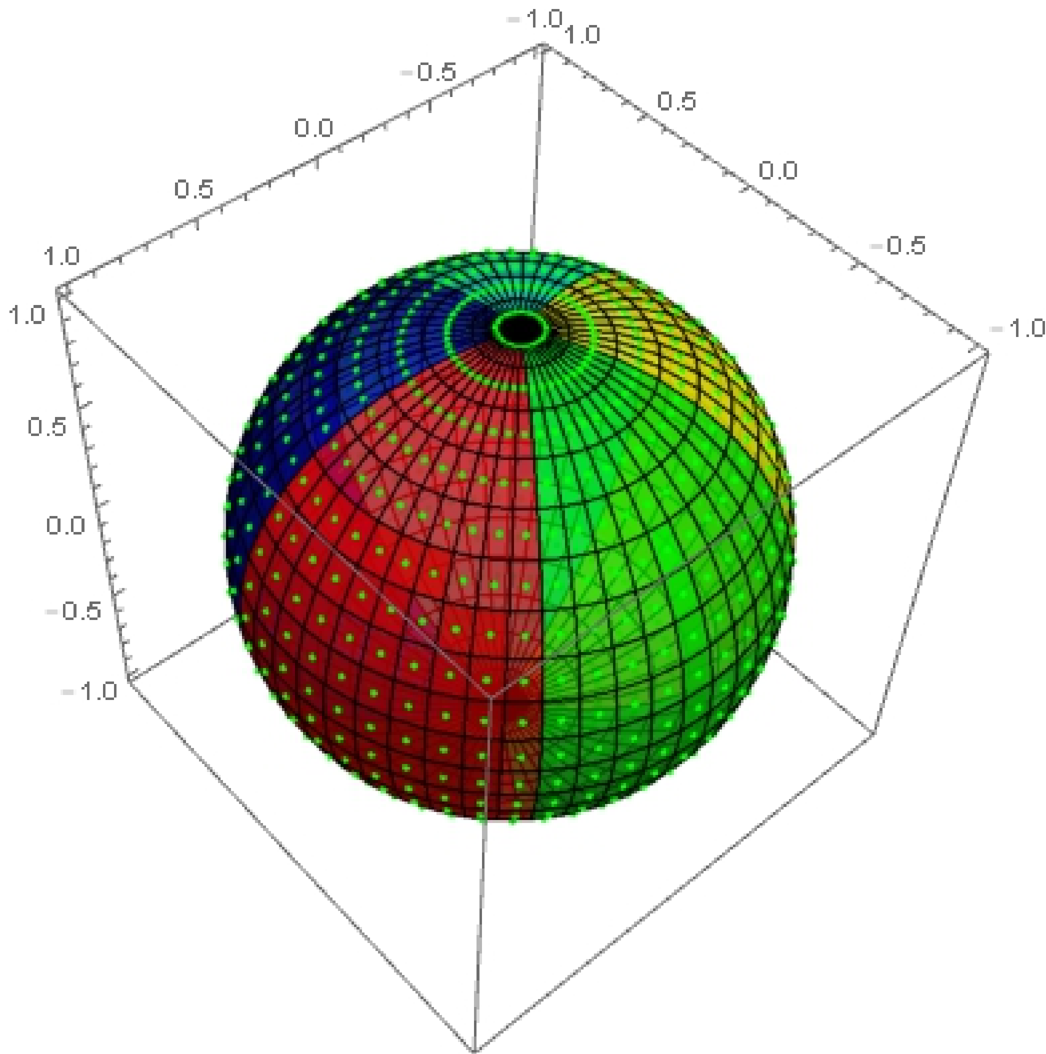
Exemple : Problème intérieur, sphère pleine (r,ϑ,φ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en r=l_r. ne dépendant que de l'angle φ

Soit le problème :

$\Delta T(r,\theta,\varphi)=0 \quad T(r,\theta,\varphi)\ fini$

$T(r,\theta,\varphi)\big|_{r=l_r}=f_\varphi(\varphi)$

Ici la couleur figure la variabilité des conditions aux limites suivant l'angle φ et indépendante de ϑ



Dans ce problème on revient à une géométrie à 3 dimensions, et une solution dépendant bien des trois coordonnées sphériques.

La solution respectant les contraintes de finitude sur le domaine intérieur de la sphère s'écrit comme suit:

$$T(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=+n} r^n P_n^m(Cos(\theta))\left(A_{n,m}Cos(m\varphi)+B_{n,m}Sin(m\varphi)\right)$$

$$P_n^{-m}(z)=\frac{(-1)^m(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(z)\quad P_n^0(z)=P_n(z)\quad P_n^n(z)=\frac{(-1)^n(2n)!\left(1-z^2\right)^{\frac{n}{2}}}{2^n n!}\quad P_n^{-n}(z)=\frac{\left(1-z^2\right)^{\frac{n}{2}}}{2^n n!}$$

$$T(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{m=+n} A_{n,m}r^n P_n^m(Cos(\theta))e^{im\varphi}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{m=+n} C_{n,m}r^n P_n^m(Cos(\theta))e^{im\varphi}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{m=+n} S_{n,m}r^n Y_n^m(\theta,\varphi)$$

$$Y_n^m(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}P_n^m(Cos(\theta))e^{im\varphi}\quad tq\quad \left\|Y_n^m(\theta,\varphi)\right\|^2=\int_0^{\pi}d\theta\, Sin(\theta)\int_0^{2\pi}d\varphi\, Y_n^m(\theta,\varphi)\overline{Y_n^m(\theta,\varphi)}=1$$

Le respect des conditions aux limites donnent la solution suivante :

$$Y_n^m(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}P_n^m(Cos(\theta))e^{im\varphi}\quad tq\quad \left\|Y_n^m(\theta,\varphi)\right\|^2=\int_0^{\pi}d\theta\, Sin(\theta)\int_0^{2\pi}d\varphi\left(Y_n^m(\theta,\varphi)\right)^2=1$$

$$T(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{m=+n} S_{n,m}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n Y_n^m(\theta,\varphi)$$

$$S_{n,m}=\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\int_0^{\pi}d\theta\, Sin(\theta)\overline{Y_n^m(\theta,\varphi)}$$

En développant une solution avec les harmoniques sinusoïdales classiques, supposons que la condition aux limites est une fonction paire de l'angle, il vient :

$$Condition\ aux\ limites\ f_\varphi(\varphi)=f_\varphi(-\varphi)$$

$$\left\|P_n^m(Cos(\theta))\right\|^2=\int_0^{\pi}d\theta\, Sin(\theta)\left(P_n^m(Cos(\theta))\right)^2=\frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\qquad P_0(z)=1\Rightarrow\left\|P_0(Cos(\theta))\right\|^2=\int_0^{\pi}d\theta\, Sin(\theta)=2$$

$$\left\|Cos(m\varphi)\right\|^2=\int_0^{2\pi}d\theta\, Cos^2(m\varphi)=(1+\partial_{m,0})\pi$$

$$T(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=+n} B_{n,m}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n^m(Cos(\theta))Cos(m\varphi)\quad B_{n,m}=\frac{\int_0^{\pi}d\theta\, Sin(\theta)P_n^m(Cos(\theta))\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Cos(m\varphi)}{\left\|P_n^m(Cos(\theta))\right\|^2\left\|Cos(m\varphi)\right\|^2}$$

$$B_{n,m}=\frac{\int_{-1}^{+1}dz\, P_n^m(z)\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Cos(m\varphi)}{\left\|P_n^m(Cos(\theta))\right\|^2\left\|Cos(m\varphi)\right\|^2}\quad \int_{-1}^{+1}dz\, P_n^m(z)=\frac{m\left((-1)^n+(-1)^m\right)2^{m-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n-m}{2}\right)!}\quad \int_{-1}^{+1}dz\, P_0(z)=2$$

$$T(r,\theta,\varphi)=\frac{A_0}{2\pi}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n\frac{(2n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\sum_{m=1}^{m=+n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{m\left((-1)^n+(-1)^m\right)2^{m-2}\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!}A_m P_n^m(Cos(\theta))Cos(m\varphi)$$

$$A_0=\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\quad A_m=\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Cos(m\varphi)=2\int_0^{\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Cos(m\varphi)$$

Lorsque la fonction limite est par exemple $f_\varphi(\varphi)=1$*, alors la solution est bien triviale puisque les coefficients sont tous nuls sauf pour la valeur m=0, et également pour toutes les valeurs de n, sauf la valeur n=0, comme suit :*

$$A_m=\int_0^{2\pi} d\varphi\ Cos(m\varphi)=2\pi\ \partial_{m,0}$$

$$P_n^m\big(Cos(\theta)\big)\to P_n\big(Cos(\theta)\big)\quad \int_{-1}^{+1} dz\, P_n\big(z\big)=2\partial_{n,0}$$

$$T\big(r,\theta,\varphi\big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=+n}\frac{4\pi\ \partial_{n,0}\ \partial_{m,0}}{2(1+\partial_{m,0})\pi}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n\big(Cos(\theta)\big)Cos(m\varphi)\Rightarrow T\big(r,\theta,\varphi\big)=P_0\big(Cos(\theta)\big)=1$$

Supposons que la condition aux limites est une fonction impaire de l'angle azimutal φ, il vient :

Condition aux limites $f_\varphi(\varphi)=-f_\varphi(-\varphi)$

$$Comme\quad \int_{-1}^{+1} dz\, P_n^m\big(z\big)=0\quad si\ m=0\quad il\ vient\ n>0$$

$$\Rightarrow T\big(r,\theta,\varphi\big)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n\frac{(2n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\sum_{m=1}^{m=+n}\frac{\big(n-m\big)!}{\big(n+m\big)!}\frac{m\big((-1)^n+(-1)^m\big)2^{m-2}\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!}A_m P_n^m\big(Cos(\theta)\big)Sin(m\varphi)$$

$$A_m=\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Sin(m\varphi)=2\int_0^{\pi} d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Sin(m\varphi)$$

Prenons par exemple une fonction limite impaire du type :

Condition aux limites

$$f_\varphi(\varphi)=\begin{cases}1\quad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\quad,\quad -1\quad \varphi\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\quad,\quad 1\quad \varphi\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\quad,\quad -1\quad \varphi\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\end{cases}$$

$$f_\varphi(\varphi)=-f_\varphi(2\pi-\varphi)=-f_\varphi(-\varphi)\quad \varphi'=2\pi-\varphi$$

$$A_m=\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Sin(m\varphi)=2\int_0^{\pi} d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Sin(m\varphi)=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ Sin(m\varphi)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi\ Sin(m\varphi)\right)$$

$$=\frac{2}{m}\left(\big[Cos(m\varphi)\big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\big[Cos(m\varphi)\big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\Rightarrow A_m=\frac{2}{m}\left((-1)^m-2Cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)+1\right)=\begin{cases}0\quad si\ m\ impair\\ 0\quad si\ m=4p\\ \frac{8}{4p+2}=\frac{8}{m}\quad si\ m=4p+2\end{cases}$$

$$T\big(r,\theta,\varphi\big)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n\frac{(2n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\sum_{m=2,m\in\{4p+2\}}^{m=+n}\frac{\big(n-m\big)!}{\big(n+m\big)!}\frac{\big((-1)^n+(-1)^m\big)2^m\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!}P_n^m\big(Cos(\theta)\big)Sin(m\varphi)$$

Et une fonction limite paire comme suit donne la solution suivante :

Condition aux limites

$$f_\varphi(\varphi)=\begin{cases}0 \quad \varphi\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right] \quad et \quad 1 \quad \varphi\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right] \quad et \quad 0 \quad \varphi\in\left[\frac{4\pi}{3},2\pi\right]\end{cases}$$

$$f_\varphi(\varphi)=f_\varphi(2\pi-\varphi)=f_\varphi(-\varphi)$$

$$A_0=\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_\varphi(\varphi)=\frac{2\pi}{3}$$

$$A_m=2\int_0^{\pi} d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Cos(m\varphi)=2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} d\varphi\, Cos(m\varphi)=\frac{2}{m}\left[Sin(m\varphi)\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=\frac{\sqrt{3}}{m}\begin{cases}0 \quad si \quad m=3p\\-1 \quad si \quad m=3p+1\\1 \quad si \quad m=3p+2\end{cases}$$

$$T(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{8\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n\frac{(2n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\sum_{m=1,m\in\{3p+1,3p+2\}}^{m=+n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{\left((-1)^n+(-1)^m\right)2^m\,\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)(-1)^{Mod(m,3)}P_n^m\left(Cos(\theta)\right)Cos(m\varphi)}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!}$$

.

Exemple : Sphère pleine (r,ϑ) soumise à des conditions aux limites de Neumann inhomogènes en r=l$_r$.

Si le problème s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T_r^{'}(r,\theta)\Big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)\ fini$$

Alors la solution (à une constante près quelconque) s'écrit sous la forme :

$$z=Cos(\theta)\quad B_0\ quelconque\quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=B_0+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{r}{n}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{n-1}P_n(Cos(\theta))$$

Conditions aux limites paires $f_\theta(Cos(\theta))=f_\theta(Cos(\pi-\theta))$ *:*

$$z=Cos(\theta)\quad B_0\ quelconque\quad B_{2n}=2\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{2n}(z)$$

$$T(r,\theta)=B_0+\sum_{n=1,+\infty}B_{2n}\frac{(4n+1)}{2}\frac{r}{2n}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n-1}P_{2n}(Cos(\theta))$$

Conditions aux limites impaires $f_\theta(Cos(\theta))=-f_\theta(Cos(\pi-\theta))$ *:*

$$z=Cos(\theta)\quad B_0\ quelconque\quad B_{2n+1}=2\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)$$

$$T(r,\theta)=B_0+\sum_{n=1,+\infty}B_{2n+1}\frac{(4n+3)}{2}\frac{r}{2n+1}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

***Exemple : Sphère pleine (r,ϑ) soumise à des conditions aux limites de Robin inhomogènes en* r=lr.**

Si le problème s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T_r^{'}(r,\theta)+hT(r,\theta)\Big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)\ fini$$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$z=Cos(\theta)\quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\qquad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2h}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\,\frac{(2n+1)}{2(n+hl_r)}\,r\left(\frac{r}{l_r}\right)^{n-1}\ P_n(Cos(\theta))$$

Avec des conditions aux limites paires $f_\theta(Cos(\theta))=f_\theta(Cos(\pi-\theta))$ *:*

$$z=Cos(\theta)\quad B_0=\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\qquad B_{2n}=\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{2n}(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{h}+\sum_{n=1,+\infty}B_{2n}\,\frac{(4n+1)}{(2n+hl_r)}\,r\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n-1}\ P_{2n}(Cos(\theta))$$

Avec des conditions aux limites impaires $f_\theta(Cos(\theta))=-f_\theta(Cos(\pi-\theta))$ *:*

$$z=Cos(\theta)\quad B_{2n+1}=\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}B_{2n+1}\,\frac{(4n+3)}{(2n+1+hl_r)}\,r\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n}\ P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : Hémisphère pleine (r,ϑ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en r=l_r. homogènes en *θ=π/2*

Commençons par un problème dans une hémisphère soumise aux conditions :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=1$$
$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\pi/2}=0$$
$$T(r,\theta)\ fini$$

Utilisons une astuce, et considérons le problème d'une sphère pleine soumise aux conditions aux limites impaires en θ

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=1\ pour\ \theta\in[0,\pi/2]$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=-1\ pour\ \theta\in[\pi/2,\pi]$$
$$T(r,\theta)\ fini$$

On voit que la solution de ce problème doit nécessairement comporter une valeur nulle sur la tranche. Dans ces conditions la solution du deuxième problème dans l'hémisphère supérieure est la solution du premier problème dans le même hémisphère. Le deuxième problème possède la solution suivante comme nous l'avons vu dans un exemple précédent :

$$T(r,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour le problème plus général sur l'hémisphère :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))$$
$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\pi/2}=0$$
$$T(r,\theta)\ fini$$

On utilise également l'extension au problème de la sphère avec des conditions aux limites impaires, soit :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))\quad pour\ \theta\in[0,\pi/2]$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=-f_\theta(Cos(\pi-\theta))\quad pour\ \theta\in[\pi/2,\pi]$$
$$T(r,\theta)\ fini$$

Alors la solution s'écrit sous une forme équivalente à celle d'une sphère porté à des conditions aux limites impaires :

$$z = Cos(\theta) \Rightarrow Cos(\pi - \theta) = -Cos(\theta) = -z \Rightarrow f_\theta(-z) = -f_\theta(z)$$

$$B_0 = \int_0^1 dz\ f_\theta(z) + \int_{-1}^0 dz\ f_\theta(z) = \int_0^1 dz\ f_\theta(z) - \int_1^0 dz\ f_\theta(-z) = \int_0^1 dz\ f_\theta(z) + \int_0^1 dz\ f_\theta(-z) = 0$$

$$B_n = \int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) + \int_{-1}^0 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) = \int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) - (-1)^n \int_1^0 dz\ f_\theta(-z)\ P_n(z)$$

$$= (1-(-1)^n)\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$\Rightarrow B_{2n} = 0 \quad B_{2n+1} = 2\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)$$

$$\Rightarrow C_n = \int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} C_n (4n+3)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : Sphère creuse (r,ϑ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en r=l_{r2} ***et Dirichlet homogènes en*** r=l_{r1}.

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=1\ si\ \theta\in[0,\pi/2]\quad 0\quad sinon$$

La solution est indépendante de φ et se développe en série de polynôme de Legendre

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2}\frac{\left(1-\frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(1-\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)}+\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2(n+1)}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2(n+1)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour un problème plus général :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(\theta)$$

cela donne :

$$B_0=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)\quad B_n=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)\ P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{\left(1-\frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(1-\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{n+1}\right)}P_n(Cos(\theta))$$

Si le problème s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$
$$T(r,\theta)\ fini$$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$z=Cos(\theta)\quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{\left(1-\frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(1-\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{n+1}\right)}P_n(Cos(\theta))$$

Pour le problème des deux hémisphères portées à des températures différentes:

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=T_0\ si\ \theta\in[0,\pi/2]$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=T_1\ si\ \theta\in[\pi/2,\pi]$$

il vient :

$$T(r,\theta)=\frac{T_0+T_1}{2}\frac{\left(1-\frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(1-\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)}+(T_0-T_1)\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2(n+1)}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2(n+1)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(r,\theta)=\frac{T_0+T_1}{2}\frac{\left(1-\frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(1-\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)}+\frac{(T_0-T_1)}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2(n+1)}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2(n+1)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Si T_0 =- T_1=1 alors

$$T(r,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2(n+1)}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2(n+1)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2(n+1)}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2(n+1)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : Sphère creuse (r,ϑ) soumise à des conditions aux limites de Robin inhomogènes en r=l$_{r2}$ ***et Dirichlet homogènes en*** r=l$_{r1}$.

Si le problème s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$

$$\alpha\, T_r^{'}(r,\theta)+\beta\, T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)\ fini$$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$z=Cos(\theta)\quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{\left(1-\frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(\alpha\frac{l_{r1}}{l_{r2}^2}+\beta\left(1-\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)\right)}+\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n(2n+1)\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^n-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{n+1}\right)}{2\left(\alpha\left(\frac{n}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^n+\frac{n+1}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{n+1}\right)+\beta\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^n-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{n+1}\right)\right)}P_n(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{\left(1-\frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(\beta-\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\left(\beta-\frac{\alpha}{l_{r2}}\right)\right)}+\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n(2n+1)\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^n-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{n+1}\right)}{2\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^n\left(\beta+\frac{\alpha\ n}{l_{r2}}\right)-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{n+1}\left(\beta-\frac{\alpha\ (n+1)}{l_{r2}}\right)\right)}P_n(Cos(\theta))$$

Qui redonne la solution lorsque la condition devient de Neumann α=1 et β=0 :

$$z=Cos(\theta)\quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$\alpha=1\ et\ \beta=0\Rightarrow$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{\left(1-\frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}^2}\right)}+\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n(2n+1)\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^n-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{n+1}\right)}{2\left(\left(\frac{n}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^n+\frac{n+1}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{n+1}\right)\right)}P_n(Cos(\theta))$$

.

Ainsi que la solution de Dirichlet lorsque α=0 et β=1 :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$\alpha = 0\ et\ \beta = 1 \Rightarrow$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{2} \frac{\left(1 - \frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(1 - \frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)} + \sum_{n=1,+\infty} \frac{B_n(2n+1)\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^n - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{n+1}\right)}{2\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^n - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{n+1}\right)} P_n(Cos(\theta))$$

Dans l'expression :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{2} \frac{\left(1 - \frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(\beta - \frac{l_{r1}}{l_{r2}}\left(\beta - \frac{\alpha}{l_{r2}}\right)\right)} + \sum_{n=1,+\infty} \frac{B_n(2n+1)\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^n - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{n+1}\right)}{2\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^n \left(\beta + \frac{\alpha\ n}{l_{r2}}\right) - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{n+1}\left(\beta - \frac{\alpha\ (n+1)}{l_{r2}}\right)\right)} P_n(Cos(\theta))$$

Calculons la solution quelque soit les valeurs de α et β pour des valeurs particulières de la fonction limites : Pour une fonction par palier, hémisphère supérieur à 1, hémisphère inférieur à 0.

$$si \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_r} = 1 - Heaviside(\theta - \pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$\Rightarrow B_0 = 1 \quad et \quad B_n = \int_0^1 dz\ P_n(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2n+1}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\right]$$

$$B_{2n} = 0 \quad B_{2n+1} = \frac{(-1)^n (2n-1)!(4n+3)}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!(4n+5)} = \frac{1}{(4n+5)}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(\beta - \frac{l_{r1}}{l_{r2}}\left(\beta - \frac{\alpha}{l_{r2}}\right)\right)} + \frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty} (4n+5)\ B_{2n+1} \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right) P_{2n+1}(Cos(\theta))}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\beta + \frac{\alpha\ (2n+1)}{l_{r2}}\right) - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\left(\beta - \frac{\alpha\ (2n+2)}{l_{r2}}\right)\right)}$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(\beta - \frac{l_{r1}}{l_{r2}}\left(\beta - \frac{\alpha}{l_{r2}}\right)\right)}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)} \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right) P_{2n+1}(Cos(\theta))}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\beta + \frac{\alpha\ (2n+1)}{l_{r2}}\right) - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\left(\beta - \frac{\alpha\ (2n+2)}{l_{r2}}\right)\right)}$$

.

Pour une fonction par palier, hémisphère supérieur à 0, hémisphère inférieur à 1.

$$si \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_r} = Heaviside(\theta - \pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$alors\ on\ a\ démontré\ que \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\ Sin(\theta)\ P_n\left(Cos(\theta)\right) = \int_0^{-1} dz\ P_n(z) = -(-1)^n \int_0^1 dz\ P_n(z)$$

$$comme\ B_{2n} = 0 \quad et \quad B_{2n+1} \neq 0$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(\beta - \frac{l_{r1}}{l_{r2}}\left(\beta - \frac{\alpha}{l_{r2}}\right)\right)}$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(4n+3)}{2(n+1)} \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right) P_{2n+1}(Cos(\theta))}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\beta + \frac{\alpha\ (2n+1)}{l_{r2}}\right) - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\left(\beta - \frac{\alpha\ (2n+2)}{l_{r2}}\right)\right)}$$

Pour une fonction par palier, hémisphère supérieur à 1, hémisphère inférieur à -1, la solution est la superposition de la solution hémisphère supérieur +1 - Solution hémisphère inférieur 1:

$$si \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_r} = 1-2Heaviside(\theta-\pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$T(r,\theta)=\underbrace{\left(\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(1-\dfrac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(\beta-\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\left(\beta-\dfrac{\alpha}{l_{r2}}\right)\right)}\\ +\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0,+\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{(4n+3)}{2(n+1)}\dfrac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right)P_{2n+1}(Cos(\theta))}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\beta+\dfrac{\alpha\,(2n+1)}{l_{r2}}\right)-\left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\left(\beta-\dfrac{\alpha\,(2n+2)}{l_{r2}}\right)\right)}\end{array}\right)}_{f_\theta(\theta)=1-Heaviside(\theta-\pi/2)\leftarrow hémisphère\ supérieur\ à\ 1}$$

$$-\underbrace{\left(\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(1-\dfrac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(\beta-\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\left(\beta-\dfrac{\alpha}{l_{r2}}\right)\right)}\\ -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0,+\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{(4n+3)}{2(n+1)}\dfrac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right)P_{2n+1}(Cos(\theta))}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\beta+\dfrac{\alpha\,(2n+1)}{l_{r2}}\right)-\left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\left(\beta-\dfrac{\alpha\,(2n+2)}{l_{r2}}\right)\right)}\end{array}\right)}_{f_\theta(\theta)=Heaviside(\theta-\pi/2)\leftarrow hémisphère\ inférieur\ à\ 1}$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right)P_{2n+1}(Cos(\theta))}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\beta+\dfrac{\alpha\,(2n+1)}{l_{r2}}\right)-\left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\left(\beta-\dfrac{\alpha\,(2n+2)}{l_{r2}}\right)\right)}$$

Exemple: Hémisphère creux (r,ϑ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en r=l$_{r2}$ ***et homogènes en*** r=l$_{r1}$.

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=1$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\pi/2}=0$$

En utilisant le problème équivalent de la sphère creuse dont les deux hémisphères sont soumises à des conditions aux limites de Dirichlet impaires.

$$T(r,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2(n+1)}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2(n+1)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2(n+1)}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2(n+1)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour un problème plus général :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(\theta)$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\pi/2}=0$$

Par l'équivalence avec le problème aux limites suivant sur la sphère creuse :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2},\,\theta[0,\pi/2]}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2},\,\theta[\pi/2,\pi]}=-f_\theta(Cos(\pi-\theta))$$

$$T(r,\theta)\ fini$$

cela donne :

$$C_n=\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\,P_{2n+1}(z)$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\,C_n\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{n+1}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : Hémisphère creux (r,ϑ) soumise à des conditions aux limites de Robin inhomogènes en

r=l_{r2} ***et Dirichlet homogènes en*** r=l_{r1}.

Si le problème s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$
$$\alpha\, T_r^{'}(r,\theta)+\beta\, T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$
$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$$
$$T(r,\theta)\ fini$$

Alors peut voir que la solution est également celle du problème suivant sur la sphère :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$
$$\alpha\, T_r^{'}(r,\theta)+\beta\, T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2},\,\theta[0,\pi/2]}=f_\theta(Cos(\theta))$$
$$\alpha\, T_r^{'}(r,\theta)+\beta\, T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2},\,\theta[\pi/2,\pi]}=-f_\theta(Cos(\pi-\theta))$$
$$T(r,\theta)\ fini$$

En effet supposons le problème précédent de la sphère creuse, alors la solution se développe sous la forme :

$$z=Cos(\theta)\quad f_\theta(-z)=-f_\theta(z)$$
$$B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)=0\quad B_n=(1-(-1)^n)\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$
$$B_{2n}=0\quad B_{2n+1}\neq 0$$
$$\Rightarrow T(r,\theta)=\sum_{n=1,+\infty}\frac{(4n+3)}{2}\frac{B_{2n+1}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\beta+\frac{\alpha\,(2n+1)}{l_{r2}}\right)-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\left(\beta-\frac{\alpha\,(2n+2)}{l_{r2}}\right)\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Comme seuls les coefficients impairs sont présents alors la valeur en ϑ=π/2 des polynômes de Legendre est nulle $P_{2n+1}(0)=0$ *. Il vient T(r,π/2)=0, ce qui correspond aux conditions aux limites du problème de l'hémisphère.*

La solution est donc :

$$B_{2n+1}=\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)$$
$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\frac{B_{2n+1}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\beta+\frac{\alpha\,(2n+1)}{l_{r2}}\right)-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\left(\beta-\frac{\alpha\,(2n+2)}{l_{r2}}\right)\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Lorsque α=1 et β=0, à la solution il faut ajouter une constante B0 (auparavant quelconque dans un problème de sphère avec condition de Neumann fixé) mais qui est là fixé à 0 par la condition aux limites à la base de l'hémisphère, cela donne donc :

$$\alpha = 1 \; et \; \beta = 0 \Rightarrow$$

$$B_0 = 0$$

$$B_{2n+1} = \int_0^1 dz \; f_\theta(z) \; P_{2n+1}(z)$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} (4n+3) \frac{B_{2n+1}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\frac{(2n+1)}{l_{r2}}\right) + \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\left(\frac{(2n+2)}{l_{r2}}\right)\right)} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Lorsque la fonction limite =1, alors la solution se présente sous la forme :

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(4n+3)}{2(n+1)} \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\beta + \frac{\alpha\,(2n+1)}{l_{r2}}\right) - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\left(\beta - \frac{\alpha\,(2n+2)}{l_{r2}}\right)\right)} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : Hémisphère pleine (r,ϑ) soumise à des conditions aux limites de Robin inhomogènes en r=l_r

Pour le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\ fini$$
$$\alpha\, T_r^{'}(r,\theta)+\beta\, T(r,\theta)\Big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))$$
$$T(r,\theta)\Big|_{\theta=\pi/2}=0$$

Il suffit de passer à la limite l_{r1}->0 dans les résultats précédents sur l'hémisphère creux, en éliminant le terme en 1/r pour respecter la condition de finitude de la solution, soit :

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\frac{B_{2n+1}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n+1}\left(\beta+\frac{\alpha\,(2n+1)}{l_{r2}}\right)\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\frac{B_{2n+1}\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2n+1}\right)}{\left(\beta+\frac{\alpha\,(2n+1)}{l_{r2}}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$l_{r2}\rightarrow l_r$$

$$B_{2n+1}=\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)\quad et\quad T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\frac{B_{2n+1}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}}{\left(\beta+\frac{\alpha\,(2n+1)}{l_r}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : *Cône sphérique plein d'angle θ_0, en coordonnées sphériques (r,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $r=l_r$. homogènes en θ_0*

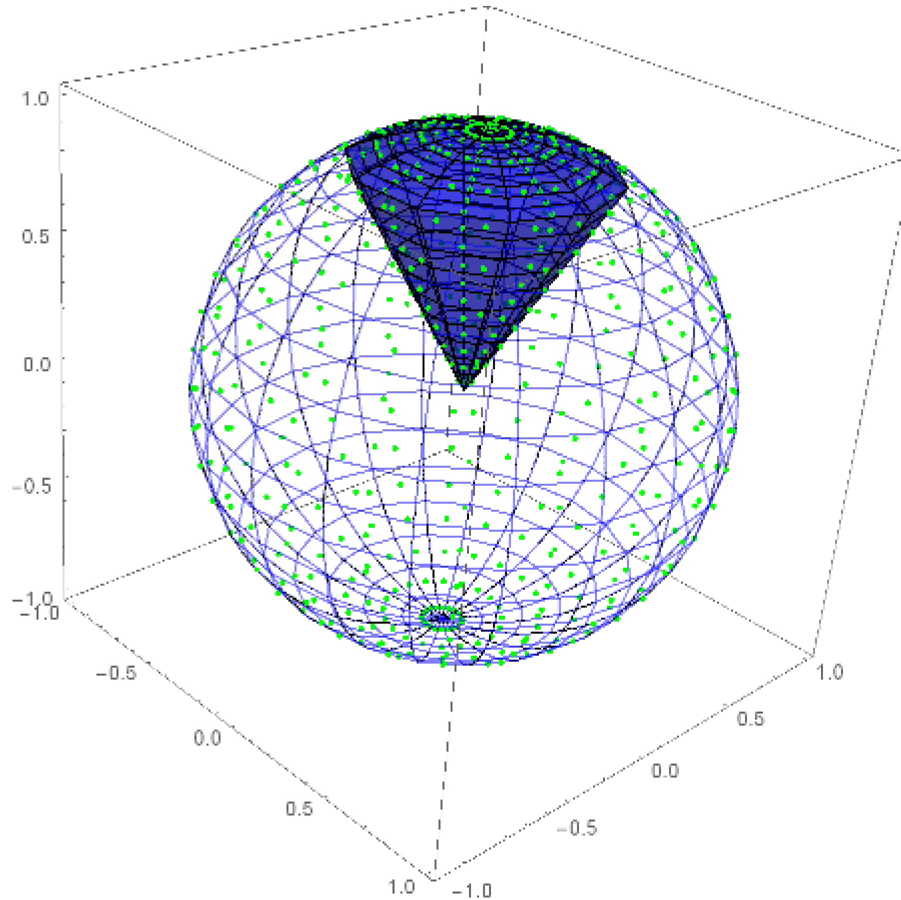
Soit le problème :

$\Delta T(r,\theta)=0$

$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))$

$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$

$T(r,\theta)\ fini$



La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$T(r,\theta)\ fini$

$T(r,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(r,-\theta)=T(r,\theta)$

$T(r,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité\ en\ \theta=0, continue\ et\ dérivable$

Pour respecter la condition aux limites $T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$*, on est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier λ_n*

$P_n(Cos(\theta))\rightarrow P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\quad \lambda_n\quad tq\quad P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=0$.

<u>Exemple</u> si l'on prend la valeur $\theta_0 = \pi/2$ *, alors on retrouve les valeurs propres* λ_n *=2n+1,*

si l'on prend l'angle $\theta_0 = \pi/3$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* 1.77729,4.76278,7.75826,10.7561,13.7548,16.754,19.7534,22.753,25.7526,28.7524,31.7521,34.752,37.7518,40.7517,43.7516,46.7515,49.7514,52.7513,55.7512,58.7512

si l'on prend l'angle $\theta_0 = \pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* 4.85051, 11.7962, 18.7798, 25.7719, 32.7673, 39.7643, 46.7622, 53.7606, 60.7594, 67.7585, 74.7577, 81.757, 88.7565, 95.756, 102.756, 109.755, 116.755, 123.755, 130.754, 137.754

si l'on prend l'angle $\theta_0 = 10\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* 0.802557, 2.55757, 4.30927, 6.06011, 7.8106, 9.56093, 11.3112, 13.0613, 14.8115, 16.5616, 18.3117, 20.0617, 21.8118, 23.5618, 25.3119, 27.0619, 28.812, 30.562, 32.312, 34.062

En respectant la contrainte de finitude et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme d'une série :

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0,+\infty} \left(A_n r^{-(\lambda_n+1)} + B_n r^{\lambda_n} \right) P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) = \sum_{n \neq 0,+\infty} B_n r^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l_r, donne la solution pour ce problème de Dirichlet:

$$B_n = \int_0^{\vartheta_0} d\vartheta \; Sin(\theta) \; f_\theta(Cos(\theta)) \; P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$z = Cos(\theta)$$

$$B_n = -\int_1^{Cos(\theta_0)} dz \; f_\theta(z) \; P_{\lambda_n}(z) = \int_{Cos(\theta_0)}^{1} dz \; f_\theta(z) \; P_{\lambda_n}(z) \qquad \left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2 = \int_{Cos(\theta_0)}^{1} dz \; P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \; tq \; P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0)) = 0 \qquad T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0,+\infty} \frac{B_n}{\left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2} \left(\frac{r}{l_r} \right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Selon les formules pour le calcul de la norme d'une fonction de Legendre de degré non entier :

$$\int_{z_1}^{z_2} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} - P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n\,\partial z}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{(2\lambda_n+1)} \quad posons \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$comme\ \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} = \frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n-1}(z)\right) \Rightarrow (z^2-1)\left.\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}\right|_{z=1} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} - P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n\,\partial z}\right)\right]_{\mu_0}^{1}}{(2\lambda_n+1)}$$

$$= \frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n}\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n-1}(z)\right) - P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n\,\partial z}\right)\right]_{\mu_0}^{1}}{(2\lambda_n+1)}$$

$$= \frac{\left[\left(\lambda_n\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n}\left(P_{\lambda_n-1}(z) - zP_{\lambda_n}(z)\right) - \left(1-z^2\right)P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n\,\partial z}\right)\right]_{\mu_0}^{1}}{(2\lambda_n+1)}$$

$$or\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0 \quad P_{\lambda_n-1}(1) = P_{\lambda_n}(1) = 1 \Rightarrow$$

$$= \frac{\lambda_n\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)}{(2\lambda_n+1)} \Rightarrow \left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = -\frac{\lambda_n}{2\lambda_n+1}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}P_{\lambda_n-1}(\mu_0)$$

on obtient le même résultat avec la formule générale sur les normes

$$\int_{\mu_0}^{1} dz\ \Phi_p(z)^2 = \frac{\left[\Phi_p(z)\left(z\Phi_p(z) - \Phi_{p-1}(z)\right) + p\left(\Phi_{p-1}(z)\frac{\partial \Phi_p(z)}{\partial p} - \Phi_p(z)\frac{\partial \Phi_{p-1}(z)}{\partial p}\right)\right]_{\mu_0}^{1}}{(2p+1)} \quad \Phi_p(z) = P_{\lambda_n}(z)$$

$$= -\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}$$

Pour les dérivées premières des fonctions de Legendre de degré p réel, il existe des formules permettant de les calculer. Celles concernant les dérivées premières en z sont :

$$\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} = \frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n -1}(z)\right) \quad \forall \lambda_n > 0 \in \Re \; ou \; \mathbf{N}$$

Il vient donc (voir expression précédente) :

$$\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}P_{\lambda_n -1}(\mu_0)$$

Pour ce qui est des dérivées premières du paramètre réel v, les formules ont déjà été données auparavant dans le texte sont plus complexes:

$$(F2) \Rightarrow \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu} = \pi\frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}P_\nu(z) - \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\psi(k-\nu)-\psi(k+\nu+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$(F3) \Rightarrow \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\sum_{j=1}^{j=k}S_k^{(j)}\nu^j\sum_{r=1}^{r=k}(-1)^r S_k^{(k)}\left(\frac{j}{\nu}+\frac{r}{\nu+1}\right)(\nu+1)^r$$

$$\forall \nu > 0 \in \Re \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

où

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* $\Leftarrow \psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$S_k^{(j)}$*nombre de Stirling de première espèce*

On retrouve la valeur de la norme de fonctions de Legendre de degré entier impaire, qui correspond au cas $\vartheta_0=\pi/2$ *:*

$$\mu_0 = Cos(\pi/2) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 2n+1\,;\, P_{\lambda_n -1}(0) = P_{2n}(0)$$

$$P_{2n}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n+2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)n!}$$

$$\Gamma\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{(-1)^{\frac{2n-1+1}{2}}2^{2n-1}\sqrt{\pi}\left(\frac{2n-1-1}{2}\right)!}{(2n-1)!} = \frac{(-1)^n 2^{2n-1}\sqrt{\pi}(n-1)!}{(2n-1)!} \Rightarrow P_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$\left\|P_{2n+1}(z)\right\|^2 = -\frac{2n+1}{4n+3}\left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=2n+1}P_{2n}(0) = -(-1)^n\frac{2n+1}{4n+3}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=2n+1}$$

$$comme \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=2n+1} \to -(-1)^n\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left\|P_{2n+1}(z)\right\|^2 \to \frac{1}{4n+3} \quad résultat\ établi\ précédemment \quad \forall n \in \mathrm{N}, \int_0^1 dz\,(P_n(z))^2 = \frac{1}{(2n+1)}$$

Nous avons affirmer que la valeur de la dérivée sur les degrés entier à la valeur zéro:

$$\left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=2n+1} = -(-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Il existe plusieurs formules (Radosław Szmytkowski, On the derivative of the Legendre function of the first kind with respect to its degree, 2005) qui montre que la valeur de la dérivée première est fonction d'un polynôme de Bromwich:

$$\left.\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=n} = P_n(z)Log\left(\frac{z+1}{2}\right) + R_n(z)$$

$R_n(z)$ *appelé polynome de Bromwich de degré n*

Plusieurs formes pour $R_n(z)$

$$(1)\ R_n(z) = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\left[P_k(z) - P_{k-1}(z)\right]P_{n-k}(z)$$

$$(2)\ R_n(z) = 2\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{n+k}\frac{2k+1}{(n-k)(n+k+1)}\left[P_k(z) - P_n(z)\right]$$

$$(3)\ R_n(z) = 2\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}\left[\psi(n+k+1) - \psi(n+1)\right]\left(\frac{z-1}{2}\right)^k$$

$$(4)\ R_n(z) = 2\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\right)P_n(z) + 2\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{n+k}\frac{2k+1}{(n-k)(n+k+1)}P_k(z)$$

$$(5)\ R_n(z) = 2\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{n+k}\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}\left[\psi(n+k+1) - \psi(k+1)\right]\left(\frac{z+1}{2}\right)^k$$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

On peut vérifier que (la valeur n'est pas donnée dans les articles de recherche, mais on peut tester numériquement la validité de la formule pour le terme de degré zero des polynômes de Bromwich au moins sur les 200 premiers termes de la suite).

$$\left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=2n+1} = P_{2n+1}(0)Log\left(\frac{z+1}{2}\right) + R_{2n+1}(0) \Leftarrow P_{2n+1}(0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=2n+1} = R_{2n+1}(0)$$

Comme $R_{2n+1}(0) = -(-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ *c.q.f.d.*

Il existe une relation de récurrence entre les polynômes de Bromwich et les polynômes de Legendre que l'on va appliquer pour démontrer ce résultat:

$$(n+1)R_{n+1}(z)-(2n+1)zR_n(z)+n\,R_{n-1}(z)=\frac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}(z)-P_{n-1}(z)\right)$$

$$\Rightarrow (n+1)R_{n+1}(0)+n\,R_{n-1}(0)=\frac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}(0)-P_{n-1}(0)\right)$$

$$avec\ n\to 2n \Rightarrow (2n+1)R_{2n+1}(0)+(2n)R_{2n-1}(0)=\frac{1}{4n+1}\left(P_{2n+1}(0)-P_{2n-1}(0)\right)$$

$$comme\ P_{2n+1}(0)=P_{2n-1}(0)=0\Rightarrow R_{2n+1}(0)=-\frac{(2n)}{(2n+1)}R_{2n-1}(0)$$

$$R_{2n+1}(0)=\frac{(2n)(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)}R_{2n-3}(0)=(-1)^n\,\frac{(2n)(2n-2)\cdots(2)}{(2n+1)(2n-1)\cdots(2n-(2n-3))}R_{2n-(2n-1)}(0)$$

$$R_{2n+1}(0)=(-1)^n\,\frac{(2n)(2n-2)\cdots(2)}{(2n+1)(2n-1)\cdots(3)}R_1(0)=(-1)^n\,\frac{2^n(n!)}{(2n+1)(2n-1)\cdots(3)}R_1(0)=$$

$$=(-1)^n\,\frac{2^n(n!)(2n)(2n-2)\cdots(2)}{(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots(2)(1)}R_1(0)$$

$$R_{2n+1}(0)=(-1)^n\,\frac{2^n(n!)2^n(n!)}{(2n+1)!}R_1(0)$$

$$R_1(z)=z-1\Rightarrow R_1(0)=-1\Rightarrow R_{2n+1}(0)=-(-1)^n\,\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\quad c.q.f.d$$

La solution de ce problème de Dirichlet sur le cône sphérique devient donc :

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\quad B_n=\int_{\mu_0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z)\quad T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}-\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n}\frac{B_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=T_0$ alors :

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\quad \lambda_n\quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0\quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=-\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\quad P_\nu(1)=1$$

$$\int dz\ P_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n+1}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)}{2\lambda_n+1}\Rightarrow B_n=T_0\int_{\mu_0}^{1}dz\ P_{\lambda_n}(z)=\left[\frac{P_{\lambda_n+1}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)}{2\lambda_n+1}\right]_{\mu_0}^{1}\quad \frac{B_n}{T_0}=\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)-P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{2\lambda_n+1}$$

$$P_{\lambda_n}(\mu_0)=0=\frac{\lambda_nP_{\lambda_n-1}(\mu_0)+(\lambda_n+1)P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{(2\lambda_n+1)\mu_0}\Rightarrow P_{\lambda_n-1}(\mu_0)=-\frac{(\lambda_n+1)P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{\lambda_n}\quad \frac{B_n}{T_0}=-P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\frac{\dfrac{(\lambda_n+1)}{\lambda_n}+1}{2\lambda_n+1}$$

$$=-\frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{\lambda_n}=\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\lambda_n+1}\Rightarrow T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)\qquad \lambda_n\quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$T(r,\theta)=-T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\dfrac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\lambda_n+1}}{\dfrac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)=-T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)$$

.

Pour un problème du type suivant, il se décompose par principe de superposition en un problème sur un cône infini qui a la solution triviale T=T0 et du problème précédent.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T(r,\theta)=0\\ T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=0\\ T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0\\ T(r,\theta)\ fini\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta T_c(r,\theta)=0\\ T_c(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0\\ T_c(r,\theta)=T_0\\ \to T_c(r,\theta)\big|_{r=l_r}=T_0\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega c}(r,\theta)=0\\ T_{\Omega c}(r,\theta)\big|_{r=l_r}=T_0\\ T_{\Omega c}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0\\ T_{\Omega c}(r,\theta)\ fini\end{array}\right\}$$

Dans ce cas la solution est immédiatement trouvée :

$$T(r,\theta)=T_0\left(1+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right)\qquad \lambda_n\quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0\quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

Lorsque $\vartheta_0 = \pi/2$, on reprend la valeur de la dérivée paramétrique :

$$\theta_0=\frac{\pi}{2}\quad \mu_0=0\quad P_{\lambda_n}(0)=0\quad \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n=2n+1}=-(-1)^n\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\quad \lambda_n=2n+1\quad P_{2n+1}(1)=1$$

$$T(r,\theta)=T_0\left(1-\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n)!}{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(Cos(\theta))\right)$$

$$\theta=0\Rightarrow T(r,0)=T_0\left(1-\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n)!}{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}\right)$$

.

On va maintenant regarder la solution dans une section de cône non borné entre un rayon minimum et et l'infini :

$$\Delta T(r,\theta)=0\quad (r,\theta)\in\{l_r\le r<\infty, 0\le\theta<\theta_0,\}$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$$

$$Lim_{r\to\infty}T(r,\theta)=0$$

La solution s'écrit :

$$B_n=\int_0^{\vartheta_0}d\vartheta\ Sin(\theta)\ f_\theta(Cos(\theta))\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$z=Cos(\theta)\quad B_n=\int_{Cos(\theta_0)}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z)\quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{Cos(\theta_0)}^{1}dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n\ tq\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=0\qquad T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\lambda_n+1}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Ce qui donne lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=T_0$:

$$T(r,\theta) = -T_0 \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \left(\frac{l_r}{r}\right)^{\lambda_n+1} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \qquad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

.

Décomposition de l'unité

Les deux solutions des problèmes intérieurs et extérieurs de Dirichlet permettent d'écrire une formule de décomposition de l'unité sur le système des fonctions propres angulaires. Cette formule est particulièrement utile pour des calculs ultérieurs :

$$(1) \quad T(r,\theta) = -T_0 \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\ \lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \qquad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$(2) \quad T(r,\theta) = -T_0 \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \left(\frac{l_r}{r}\right)^{\lambda_n+1} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \qquad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$T_0=1 \quad r=l_r \Rightarrow 1 = -\sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$Avec\ les\ normes\ \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)} \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n} P_{\lambda_n-1}(\mu_0)$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Pour le problème lorsque $\vartheta_0 = \pi/2$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta T(r,\theta)=0 \\ T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=0 \\ T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0 \\ Lim_{r\to\infty} T(r,\theta)\ \ fini \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta T_c(r,\theta)=0 \\ T_c(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0 \\ T_c(r,\theta)=T_0 \\ \to T_c(r,\theta)\big|_{r=l_r}=T \end{array}\right\} - \left.\begin{array}{l} \Delta T_{\Omega c}(r,\theta)=0 \\ T_{\Omega c}(r,\theta)\big|_{r=l_r}=T_0 \\ T_{\Omega c}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \\ Lim_{r\to\infty} T_{\Omega c}(r,\theta)=0 \end{array}\right\}$$

Donne :

$$\theta_0=\frac{\pi}{2} \quad \mu_0=0 \quad P_{\lambda_n}(0)=0 \quad \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda_n=2n+1} = -(-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \lambda_n=2n+1 \quad P_{2n+1}(1)=1$$

$$T(r,\theta)=T_0\left(1-\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(Cos(\theta))\right)$$

$$\theta=0 \Rightarrow T(r,0)=T_0\left(1-\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+2}\right)$$

.

Exemple : pour un problème de Dirichlet du type :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad (r,\theta)\in\{l_{r1}\le r<l_{r2},0\le\theta<\theta_0,\}$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=f_\theta^{l_{r1}}(Cos(\theta)) \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta^{l_{r2}}(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$$

$$Lim_{r\to\infty}T(r,\theta)=0$$

on montre facilement que la solution se présente sous la forme :

$$\lambda_n \ tq \ P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=0 \quad z=Cos(\theta) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{Cos(\theta_0)}^{1}dz\, P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{C_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

avec

$$B_n=\int_{Cos(\theta_0)}^{1}dz\, f_\theta^{l_{r1}}(z)\,P_{\lambda_n}(z)$$

$$C_n=\int_{Cos(\theta_0)}^{1}dz\, f_\theta^{l_{r2}}(z)\,P_{\lambda_n}(z)$$

.

Le problème suivant est subtilement différent, même s'il se présente d'une manière assez similaire, il se développe sur un cône infini.

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad (r,\theta)\in\{0\le r<\infty, 0\le\theta<\theta_0\}$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=\begin{cases}T_0 & 0\le r\le l_r\\ 0 & l_r\le r<\infty\end{cases}$$

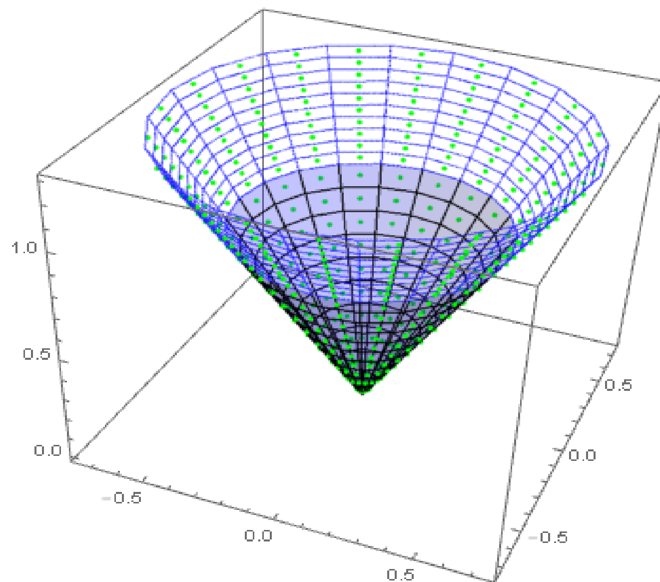
$$Lim_{r\to\infty}T(r,\theta)=0$$

Avec cette exemple la recherche de la solution du problème peut mettre en oeuvre une transformation de Mehler, et un calcul d'intégrale à contour dans le plan complexe ainsi que l'application du théorème des résidus. La solution s'écrit (voir l'article Steady-State Heat Conduction in a Circular Cone de ROKURO MUKI and ELI STEIRNBERG, 1959):

$$\lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$T(r,\theta)=\begin{cases}T_0\left(1+\sum_{n\neq 0,+\infty}\dfrac{1}{\lambda_n\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\dfrac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right) & 0\le r\le l\\ -T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\dfrac{1}{(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\dfrac{l_r}{r}\right)^{\lambda_n+1}P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) & l_r\le r<\infty\end{cases}.$$

On peut également trouver cette solution à l'aide du principe de superposition. Les apparences sont trompeuses mais il ne s'agit pas tout à fait du même calcul car les deux exemples précédents montrer soit un domaine bornée avec deux conditions l'une homogène et l'autre inhomogènes, soit un domaine non-bornée mais également avec le même de conditions aux limites. Il n'y a donc aucune raison que la solution soit de valeur T_0 à la surface de rayon lr. Pour autant, on peut au moins utiliser un de nos résultat pour prouver que cette solution est bien continue sur la surface r=lr.



En effet la solution du problème intérieur s'écrivait :

$$T_\Omega(r,\theta) = -T_0 \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \qquad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$\Rightarrow \frac{T_\Omega(l_r,\theta)}{T_0} = -\sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) = 1$$

$Injectée\,dans\,la\,solution\,à\,la\,valeur\; r = l_r$

$$\frac{T(l_r,\theta)}{T_0} = \begin{cases} 1+\sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{\lambda_n \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} - \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \right) P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \\ = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)} \right) P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{\lambda_n \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \left(\frac{(\lambda_n+1)}{(\lambda_n+1)} - \frac{(2\lambda_n+1)}{(\lambda_n+1)} \right) P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \\ = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{\lambda_n \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \left(\frac{-\lambda_n}{(\lambda_n+1)} \right) P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) = -\sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \qquad 0 \le r \le l \\ -\sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad l_r \le r < \infty \end{cases}$$

Et la continuité est démontrée. C'est déjà un bonne indice que le calcul de la solution de notre problème a des chances d'être juste, corroboré indirectement et partiellement par le résultat d'un autre problème. Finalisons la construction de la solution, le problème de départ peut se décomposer ainsi :

$$T(r,\theta) = T_{\Omega 1}(r,\theta) + T_{\Omega 2}(r,\theta)$$

$$\Omega 1 = \{0 \le r < l_r, 0 \le \theta < \theta_0\}$$

$$\Omega 2 = \{l_r \le r < \infty, 0 \le \theta < \theta_0\}$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0} = T_0$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0} = 0$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{r=l_r} = T_{\Omega 2}(r,\theta)\big|_{r=l_r}$$

Le deuxième problème est un problème aux limites avec conditions homogènes qui a la solution formelle :

$\lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta) = -\sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} \frac{C_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \left(\frac{l_r}{r}\right)^{\lambda_n+1} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad l_r \le r < \infty$$

.

On a voit que le premier problème se décompose encore en deux sous problèmes :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta T_{\Omega 1}(r,\theta)=0 \\ T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{r=l_r} = f_\theta(\theta) \\ T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0} = T_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta T_{\Omega 11}(r,\theta)=0 \\ T_{\Omega 11}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0} = T_0 \\ T_{\Omega 11}(r,\theta) = T_0 \\ \rightarrow T_{\Omega 11}(r,\theta)\big|_{r=l_r} = T_0 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} \Delta T_{\Omega 12}(r,\theta)=0 \\ T_{\Omega 12}(r,\theta)\big|_{r=l_r} = T_0 - f_\theta(\theta) \\ T_{\Omega 12}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0} = 0 \\ T_{\Omega 12}(r,\theta)\ fini \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow T_{\Omega 1}(r,\theta) = T_0 - T_{\Omega 12}(r,\theta)$

On voit que $T_{\Omega 12}(r,\theta)$ *est solution du même problème aux limites homogène sur la surface du cône que* $T_{\Omega 1}(r,\theta)$*. La différence essentielle c'est que l'un est un problème extérieur et l'autre intérieur. Il vient donc la décomposition avec les même fonctions propres angulaires :*

$\lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta) = T_0 + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} \frac{B_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad 0 \le r \le l_r$$

Appliquons la décomposition de l'unité dans le système de fonctions propres angulaires, il vient :

$$T_{\Omega 1}(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \left(-\frac{(2\lambda_n+1)T_0}{\lambda_n(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} + \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} \frac{B_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} \right) P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad 0 \le r \le l_r$$

La condition de continuité des solutions et celle de continuité de la dérivée première radiale donnent immédiatement :

$$T_{\Omega 1}(r,\theta)\big|_{r=l_r} = T_{\Omega 2}(r,\theta)\big|_{r=l_r} \Rightarrow -\frac{T_0}{\lambda_n(\lambda_n+1)} + \frac{B_n}{\lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0)} = -\frac{C_n}{\lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0)} \Leftrightarrow -\frac{T_0}{(\lambda_n+1)} + \frac{B_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)} = -\frac{C_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}$$

$$\left.\frac{\partial T_{\Omega 1}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=l_r} = \left.\frac{\partial T_{\Omega 2}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=l_r} \Rightarrow \frac{\lambda_n B_n}{l_r \lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0)} = \frac{(\lambda_n+1)C_n}{l_r \lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0)} \Leftrightarrow B_n = \frac{(\lambda_n+1)C_n}{\lambda_n}$$

Ces deux conditions conduisent donc à un système d'équation linéaire des coefficients qui a la solution triviale :

$$\frac{T_0}{(\lambda_n+1)} = \frac{C_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} \Rightarrow C_n = T_0 \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\lambda_n}{(\lambda_n+1)(2\lambda_n+1)} \Rightarrow B_n = \frac{(\lambda_n+1)C_n}{\lambda_n} = T_0 \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(2\lambda_n+1)}$$

.

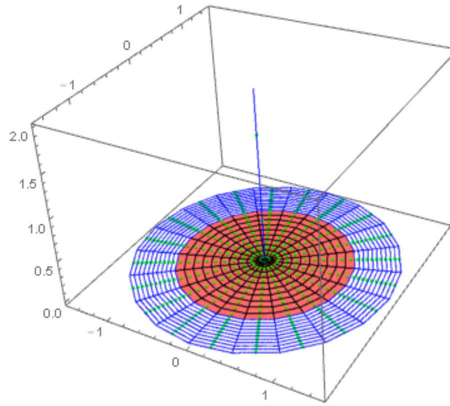
Ce qui donne bien les deux solutions une fois injectées ces valeurs des coefficients :

$$\lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta)=T_0\left(1+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{\lambda_n\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right) \quad 0\le r\le l_r$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)=-T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\lambda_n+1} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad l_r\le r<\infty \quad c.q.f.d$$

Il n'est donc pas forcément besoin de développer des techniques de calcul opérationnel (transformation de Mehler) pour trouver cette solution. Regardons maintenant le comportement de cette solution lorsque l'angle d'ouverture du cône est π/2 :



$$\mu_0=0 \quad P_{\lambda_n}(0)=0 \Rightarrow \lambda_n=2n+1 \quad P_{2n+1}(1)=1 \quad \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda_n=2n+1} = -(-1)^n\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$Or \quad \sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n)!}{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}P_{2n+1}(Cos(\theta))=1 \qquad partition\ de\ l'unit\acute{e}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\Omega 1}(r,\theta)}{T_0}=\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n)!}{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}P_{2n+1}(Cos(\theta))-\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(Cos(\theta)) \quad l_r\le r<\infty$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(r,\theta)}{T_0}=\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!}{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+2}P_{2n+1}(Cos(\theta)) \quad c.q.f.d$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\Omega 1}(l_r,\theta)}{T_0}=\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)(2n)!}{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}P_{2n+1}(Cos(\theta))\Rightarrow continuit\acute{e}$$

$$\theta=0\Rightarrow\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0}=1-\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}$$

$$Posons \quad x=\frac{r}{l_r}\Rightarrow\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n+1} \quad d\acute{e}veloppement\ en\ s\acute{e}rie\ de\ Taylor\ autour\ de\ 0\ de\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

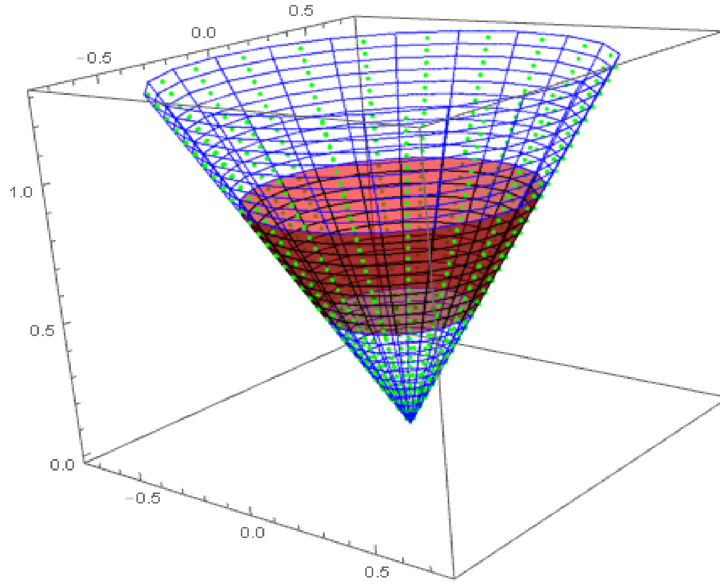
$$\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0}=1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{r}{\sqrt{l_r^{\,2}+r^2}}\Rightarrow T_{\Omega 1}(r,0)=T_0\left(1-\frac{r}{\sqrt{l_r^{\,2}+r^2}}\right)$$

C'est exactement le résultat trouvé dans l'article "Steady-State Heat Conduction in a Circular Cone" de ROKURO MUKI and ELI STEIRNBERG, 1959.

Exemple : *continuons dans la foulée de cet exemple, pour prendre en considération le problème suivant, qui cette fois possède trois zones de décomposition distinctes :*

$\Delta T(r,\theta)=0$

$T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[0,l_{r1}]}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=T_0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r2},+\infty]}}=0$



Problème qui décompose en trois sous-problèmes :

$T(r,\theta)=T_{\Omega1}(r,\theta)+T_{\Omega2}(r,\theta)+T_{\Omega3}(r,\theta)$

qui sont définis par les conditions aux limites suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega1}(r,\theta)=0\\ T_{\Omega1}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=T_{\Omega2}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}\Leftrightarrow T_{\Omega1}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=T_{\Omega2h}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}+T_0\\ T_{\Omega1}(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[0,l_{r1}]}}=0\end{array}\right\}+$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega2}(r,\theta)=0\rightarrow T_{\Omega2}=T_0+T_{\Omega2h}\\ T_{\Omega2}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=T_{\Omega1}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}\Leftrightarrow T_{\Omega2h}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=T_{\Omega1}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}-T_0\\ T_{\Omega2}(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=0\end{array}\right\}+$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T_{\Omega3}(r,\theta)=0\\ T_{\Omega3}(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=T_{\Omega2}(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}\Leftrightarrow T_{\Omega2h}(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=T_{\Omega3}(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}-T_0\\ T_{\Omega3}(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r2},+\infty]}}=0\end{array}\right\}$$

Auquel il faudra également appliquer les conditions de continuité C_0 et C_1

$$T_{\Omega 1}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r1}} = T_{\Omega 2}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r1}}$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r2}} = T_{\Omega 3}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r2}}$$

$$\left.\frac{\partial T_{\Omega 1}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=l_{r1}} = \left.\frac{\partial T_{\Omega 2}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=l_{r1}}$$

$$\left.\frac{\partial T_{\Omega 2}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=l_{r2}} = \left.\frac{\partial T_{\Omega 3}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=l_{r2}}.$$

Les solutions formelles des trois problèmes sont les suivantes :

$$\lambda_n \ tq \ P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0)) = 0 \quad z = Cos(\theta) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{Cos(\theta_0)}^{1} dz \ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{A_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$T_{\Omega 3}(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{D_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Pour le problème central on fait intervenir deux fonctions limites au rayon inférieur et supérieur :

$$\lambda_n \ tq \ P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0)) = 0 \quad z = Cos(\theta) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{Cos(\theta_0)}^{1} dz \ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta) = T_0 + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$+ \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{C_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}.$$

Bn et Cn représente les contributions respectives des conditions aux limites inhomogènes en lr1 et lr2.

En introduisant la partition de l'unité en série de fonctions propres angulaires, il vient :

$$\lambda_n \ tq \ P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0)) = 0 \quad z = Cos(\theta) \quad \left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2 = \int_{Cos(\theta_0)}^{1} dz \, P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta) = T_0 \sum_{n \neq 0,+\infty} \frac{P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{(\lambda_n + 1)\left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) + \sum_{n \neq 0,+\infty} \frac{B_n}{\left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r2}} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{r} \right)^{\lambda_n + 1} \right)}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}} \right)^{\lambda_n + 1} \right)}$$

$$+ \sum_{n \neq 0,+\infty} \frac{C_n}{\left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{r} \right)^{\lambda_n + 1} \right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}} \right)^{\lambda_n + 1} \right)}$$

.

En appliquant les conditions de continuité, on obtient deux équations linéaires :

$$A_n = T_0 \frac{P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{(\lambda_n + 1)} + B_n$$

$$D_n = T_0 \frac{P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{(\lambda_n + 1)} + C_n$$

.

Les conditions de continuité de la dérivée donne des équations sensiblement plus compliquées, pour cela il faut écrire les dérivées suivantes :

$$\left. \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{l_{r1}} \right)^{\lambda_n} \right|_{r=l_{r1}} = \frac{\lambda_n}{l_{r1}} \qquad \left. \frac{d}{dr} \left(\frac{l_{r1}}{r} \right)^{\lambda_n + 1} \right|_{r=l_{r1}} = -\frac{\lambda_n + 1}{l_{r1}}$$

$$\left. \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{l_{r2}} \right)^{\lambda_n} \right|_{r=l_{r2}} = \frac{\lambda_n}{l_{r2}} \qquad \left. \frac{d}{dr} \left(\frac{l_{r2}}{r} \right)^{\lambda_n + 1} \right|_{r=l_{r2}} = -\frac{\lambda_n + 1}{l_{r2}}$$

$$\left. \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{l_{r1}} \right)^{\lambda_n} \right|_{r=l_{r2}} = \frac{\lambda_n}{l_{r2}} \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}} \right)^{\lambda_n} \qquad \left. \frac{d}{dr} \left(\frac{l_{r1}}{r} \right)^{\lambda_n + 1} \right|_{r=l_{r2}} = -\frac{\lambda_n + 1}{l_{r2}} \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}} \right)^{\lambda_n + 1}$$

$$\left. \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{l_{r2}} \right)^{\lambda_n} \right|_{r=l_{r1}} = \frac{\lambda_n}{l_{r1}} \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}} \right)^{\lambda_n} \qquad \left. \frac{d}{dr} \left(\frac{l_{r2}}{r} \right)^{\lambda_n + 1} \right|_{r=l_{r1}} = -\frac{\lambda_n + 1}{l_{r1}} \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}} \right)^{\lambda_n + 1}$$

.

Ce qui donne les équations suivantes :

$$\lambda_n A_n = \frac{\left(\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} + (\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)B_n}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} + \frac{(2\lambda_n+1)C_n}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$-(\lambda_n+1)D_n = \frac{(2\lambda_n+1)B_n}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} + \frac{\left(\lambda_n\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} + (\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)C_n}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$-(\lambda_n+1)D_n = -(\lambda_n+1)C_n + \frac{(2\lambda_n+1)B_n}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} + \frac{(2\lambda_n+1)C_n\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

que l'on peut légèrement simplifier :

$$\lambda_n A_n = \lambda_n B_n + \frac{(2\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}B_n}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} + \frac{(2\lambda_n+1)C_n}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$-(\lambda_n+1)D_n = -(\lambda_n+1)C_n + \frac{(2\lambda_n+1)B_n}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} + \frac{(2\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}C_n}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

Ce qui donne :

$$A_n - B_n = T_0\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} \quad et \quad D_n - C_n = T_0\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}$$

$$\lambda_n T_0\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} = \frac{(2\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}B_n}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} + \frac{(2\lambda_n+1)C_n}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$-(\lambda_n+1)T_0\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} = \frac{(2\lambda_n+1)B_n}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} + \frac{(2\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}C_n}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

Posons :

$$U = T_0 \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} \quad B'_n = \frac{B_n}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} \quad C'_n = \frac{C_n}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$(1) \quad A_n - B_n = U$$

$$(2) \quad D_n - C_n = U$$

$$(3) \quad (2\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1} B'_n + (2\lambda_n+1)C'_n = \lambda_n U$$

$$(4) \quad (2\lambda_n+1)B'_n + (2\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} C'_n = -(\lambda_n+1)U$$

.

Et l'inversion du système final sur Bn et Cn donne :

$$U = T_0 \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} \quad B'_n = \frac{B_n}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} \quad C'_n = \frac{C_n}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$(1) \quad A_n - B_n = U$$

$$(2) \quad D_n - C_n = U$$

$$(3) \quad \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1} B'_n + C'_n = \frac{\lambda_n U}{(2\lambda_n+1)}$$

$$(4) \quad B'_n + \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} C'_n = -\frac{(\lambda_n+1)U}{(2\lambda_n+1)}$$

$$B'_n = -\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} C'_n - \frac{(\lambda_n+1)U}{(2\lambda_n+1)} = -\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{\lambda_n U}{(2\lambda_n+1)} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1} B'_n\right) - \frac{(\lambda_n+1)U}{(2\lambda_n+1)}$$

$$\Rightarrow B'_n\left(1 - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2\lambda_n+1}\right) = -\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} \frac{\lambda_n U}{(2\lambda_n+1)} - \frac{(\lambda_n+1)U}{(2\lambda_n+1)} = -\frac{U}{(2\lambda_n+1)}\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} \lambda_n + (\lambda_n+1)\right)$$

Soit :

$$B'_n = -\frac{U\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}\lambda_n + \lambda_n + 1\right)}{(2\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} = -\frac{U\left(\lambda_n + (\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)}{(2\lambda_n+1)\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$C'_n = -\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1} B'_n + \frac{\lambda_n U}{(2\lambda_n+1)} = \frac{U\left(\lambda_n + (\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}}{(2\lambda_n+1)\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} + \frac{\lambda_n U}{(2\lambda_n+1)}$$

$$C'_n = -\frac{U\left(\lambda_n\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} + (\lambda_n+1)\right)}{(2\lambda_n+1)\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} + \frac{\lambda_n U\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{(2\lambda_n+1)\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$C'_n = -\frac{U}{(2\lambda_n+1)\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}\left(\lambda_n + 1 + \lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)$$

.

En revenant aux coefficients initiaux An,Bn,Cn,Dn :

$$B_n = -\frac{U\left(\lambda_n + (\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)}{(2\lambda_n+1)} \quad C_n = -\frac{U\left(\lambda_n + 1 + \lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{(2\lambda_n+1)}$$

$$A_n = U + B_n = \frac{U(\lambda_n+1)}{(2\lambda_n+1)}\left(1 - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right) \qquad D_n = U + C_n = \frac{U\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\left(1 - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right).$$

Ce qui donne finalement les solutions :

$$\lambda_n \ tq \ P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=0 \quad z=Cos(\theta) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{Cos(\theta_0)}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$T_{\Omega1}(r,\theta)=T_0\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{1}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}\frac{(\lambda_n+1)}{(2\lambda_n+1)}\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$T_{\Omega2}(r,\theta)=T_0-T_0\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{1}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}\frac{\left(\lambda_n+(\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)}{(2\lambda_n+1)}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$-T_0\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{1}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}\frac{\left(\lambda_n+1+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{(2\lambda_n+1)}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$T_{\Omega3}(r,\theta)=T_0\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{1}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

.

En exprimant la norme des fonctions propres coniques, on obtient :

$$\lambda_n \ tq \ P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=0 \quad z=Cos(\theta) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=-\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}P_{\lambda_n-1}(\mu_0)$$

$$T_{\Omega1}(r,\theta)=-T_0\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{1}{\lambda_n\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$T_{\Omega2}(r,\theta)=T_0+T_0\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{\left(\lambda_n+(\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$+T_0\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{\left(\lambda_n+1+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}$$

$$T_{\Omega3}(r,\theta)=-T_0\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{1}{(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

.

On peut tenter de simplifier l'expression de la solution sur le domaine :

$$Or\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)=-\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)\Leftrightarrow\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)=-\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)=T_0+T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}\left(\lambda_n+(\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)$$

$$-T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}\left(\lambda_n+1+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)=T_0+T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}\times$$

$$\left(\left(\lambda_n+(\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)-\left(\lambda_n+1+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)\right)$$

L'expression

$$\left(\left(\lambda_n+(\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)\left(\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)-\left((\lambda_n+1)+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)\right)$$

$$=\left(\begin{array}{l}\lambda_n\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}+(\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\lambda_n\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1}-(\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\\ -(\lambda_n+1)\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}+(\lambda_n+1)\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\end{array}\right)$$

$$=\left((\lambda_n+1)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)\right)$$

$$=\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n+1}\right)\left((\lambda_n+1)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)$$

$$\Rightarrow T_{\Omega 2}(r,\theta)=T_0+T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left((\lambda_n+1)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}$$

Résumons pour le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[0,l_{r1}]}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r1},l_{r2}]}}=T_0 \quad T(r,\theta)\big|_{\substack{\theta=\theta_0\\ r\in[l_{r2},+\infty]}}=0$$

$$\Omega_1=[0,\theta_0]\times[0,l_{r1}] \quad \Omega_2=[0,\theta_0]\times[l_{r1},l_{r2}] \quad \Omega_3=[0,\theta_0]\times[l_{r2},+\infty].$$

Le résultat trouvé pour les solutions dans les trois sous-domaines du cône sphérique :

$$\lambda_n \ tq\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=0 \quad z=Cos(\theta)$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta)=-T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{\lambda_n\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}\right)\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta)=T_0+T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left((\lambda_n+1)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}$$

$$T_{\Omega 3}(r,\theta)=-T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{\lambda_n+1} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)).$$

Les expressions vérifient bien la condition de continuité :

$$\frac{T_{\Omega 1}(l_{r1},\theta)}{T_0}=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{\lambda_n\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-1\right)P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(l_{r1},\theta)}{T_0}=1+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left((\lambda_n+1)\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}+\lambda_n\right)P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}} \Leftarrow 1=-\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

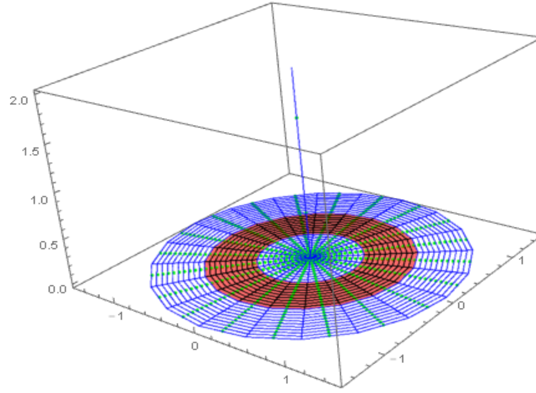
$$\frac{T_{\Omega 2}(l_{r1},\theta)}{T_0}=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(\lambda_n+1)\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-1\right)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n}-1\right)}{\lambda_n\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(l_{r2},\theta)}{T_0}=-\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left((\lambda_n+1)+\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(l_{r2},\theta)}{T_0}=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\lambda_n\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}-\lambda_n\right)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}-1\right)$$

$$\frac{T_{\Omega 3}(r,\theta)}{T_0}=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}-1\right)P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Pour un cône d'angle ouvert ϑ0 = π/2 :



$$\mu_0 = Cos(\theta_0) = 0 \quad P_{\lambda_n}(0) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 2n+1 \quad P_{2n+1}(1) = 1 \quad \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda_n = 2n+1} = -(-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow -\lambda_n \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda_n = 2n+1} = (-1)^n (2n+1)\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

$$T_{\Omega 1}(r,\theta) = T_0 \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+1}\right)\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow T_{\Omega 1}(r,\theta) = T_0 \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1} - \left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2n+1}\right) P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$T_{\Omega 2}(r,\theta) = T_0 - T_0 \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(-1)^n \left(2(n+1)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n} + (2n+1)\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)(2n)!\, P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}$$

$$T_{\Omega 3}(r,\theta) = T_0 \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(n+1)2^{2n+1}(n!)^2}\left(1-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n+2}\right)\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow T_{\Omega 3}(r,\theta) = T_0 \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(n+1)2^{2n+1}(n!)^2}\left(\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{2n+2} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right) P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$T_{\Omega 3}(r,\theta) = T_0 \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\left(\frac{r}{l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+3} - \frac{r}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{2n+3}\right) P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

.

Or : $\sum_{n\neq 0,+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}$ *développement en série de Taylor autour de 0 de* $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

On abouti pour les domaines Ω1 et Ω3 à des expressions simples sur l'axe z, toute tendant vers 0 lorsque r=0 ou r=∞ :

$$\Rightarrow \frac{T_{\Omega 1}(r,\theta)}{T_0} = \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1} - \left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2n+1}\right) P_{2n+1}(Cos(\theta)) \quad P_{2n+1}(1) = 1$$

$$\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0} = \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n+1} - \left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2n+1}\right) = \frac{r}{\sqrt{l_{r1}^{\ 2} + r^2}} - \frac{r}{\sqrt{l_{r2}^{\ 2} + r^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\Omega 3}(r,\theta)}{T_0} = \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\left(\frac{r}{l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+3} - \frac{r}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{2n+3}\right) P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$\frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0} = \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\left(\frac{r}{l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+3} - \frac{r}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{2n+3}\right)$$

$$= \sum_{n=-1,+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\left(\frac{r}{l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+3} - \frac{r}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{2n+3}\right) = \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{l_{r1}}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+1} - \frac{r}{l_{r2}}\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)^{2n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0} = \frac{r}{\sqrt{l_{r1}^{\ 2} + r^2}} - \frac{r}{\sqrt{l_{r2}^{\ 2} + r^2}}$$

Pour le domaine Ω2, on utilise l'expression simplifiée obtenu qui donne :

$$T_{\Omega 2}(r,\theta) = T_0 - T_0 \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n \left(2(n+1)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2n+1} + (2n+1)\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right)(2n)!\, P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}.$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0} = 1 - \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\left(2(n+1)\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2n+1} + (2n+1)\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n+2}\right)}{2(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0} = 1 - \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{l_{r2}}\right)^{2n+1} + \frac{r}{l_{r1}} \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2(n+1)+1}$$

$$Or \quad 1 + \frac{r}{l_{r1}} \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2(n+1)+1} = \frac{r}{l_{r1}} \sum_{n=-1,+\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2(n+1)+1}$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0} = -\frac{r}{\sqrt{l_{r2}^{\ 2} + r^2}} + \frac{r}{l_{r1}} \frac{l_{r1}}{\sqrt{r^2 + l_{r1}^{\ 2}}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l_{r1}^{\ 2}}} - \frac{r}{\sqrt{r^2 + l_{r2}^{\ 2}}}.$$

La continuité est bien assurée, contrôle formel pour écarter le risque d'une erreur de calcul manifeste :

$$\frac{T_{\Omega 1}(l_{r1},0)}{T_0}=\frac{l_{r1}}{\sqrt{{l_{r1}}^2+{l_{r1}}^2}}-\frac{l_{r1}}{\sqrt{{l_{r2}}^2+{l_{r1}}^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{l_{r1}}{\sqrt{{l_{r2}}^2+{l_{r1}}^2}}$$

$$\frac{T_{\Omega 3}(l_{r2},0)}{T_0}=\frac{l_{r2}}{\sqrt{{l_{r1}}^2+{l_{r2}}^2}}-\frac{l_{r2}}{\sqrt{{l_{r2}}^2+{l_{r2}}^2}}=\frac{l_{r2}}{\sqrt{{l_{r1}}^2+{l_{r2}}^2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(l_{r1},0)}{T_0}=\frac{l_{r1}}{\sqrt{{l_{r1}}^2+{l_{r1}}^2}}-\frac{l_{r1}}{\sqrt{{l_{r1}}^2+{l_{r2}}^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{l_{r1}}{\sqrt{{l_{r2}}^2+{l_{r1}}^2}}$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(l_{r2},0)}{T_0}=\frac{l_{r2}}{\sqrt{{l_{r2}}^2+{l_{r1}}^2}}-\frac{l_{r2}}{\sqrt{{l_{r2}}^2+{l_{r2}}^2}}=\frac{l_{r2}}{\sqrt{{l_{r2}}^2+{l_{r1}}^2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En conclusion sur l'axe z : la solution a la forme très simple suivante qui est par exemple la température donnée sur l'axe z par une couronne circulaire plan portée à la valeur T0 entre lr1 et lr2 :

$$\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0}=\frac{r}{\sqrt{{l_{r1}}^2+r^2}}-\frac{r}{\sqrt{{l_{r2}}^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{T(r,0)}{T_0}=r\left(\frac{1}{\sqrt{{l_{r1}}^2+r^2}}-\frac{1}{\sqrt{{l_{r2}}^2+r^2}}\right).$$

Cette fonction, définie sur l'axe z, contient un maximum, à la valeur de r suivante :

$$\frac{T_{\Omega 1}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 3}(r,0)}{T_0}=\frac{T_{\Omega 2}(r,0)}{T_0}=\frac{r}{\sqrt{l_{r1}^{\ 2}+r^2}}-\frac{r}{\sqrt{l_{r2}^{\ 2}+r^2}}$$

$$\frac{T'(r,0)}{T_0}=\left(\frac{l_{r1}^{\ 2}}{\left(l_{r1}^{\ 2}+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{l_{r2}^{\ 2}}{\left(l_{r2}^{\ 2}+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=0$$

$$\frac{\left(l_{r1}^{\ 2}+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{l_{r1}^{\ 2}}=\frac{\left(l_{r2}^{\ 2}+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{l_{r2}^{\ 2}}\Leftrightarrow\frac{l_{r1}^{\ 2}+r^2}{l_{r1}^{\ 4/3}}=\frac{l_{r2}^{\ 2}+r^2}{l_{r2}^{\ 4/3}}\Rightarrow r^2\left(\frac{1}{l_{r1}^{\ 4/3}}-\frac{1}{l_{r2}^{\ 4/3}}\right)=l_{r2}^{\ 2/3}-l_{r1}^{\ 2/3}$$

$$\Rightarrow r^2=\frac{\left(l_{r2}^{\ 2/3}-l_{r1}^{\ 2/3}\right)l_{r1}^{\ 4/3}l_{r2}^{\ 4/3}}{\left(l_{r2}^{\ 4/3}-l_{r1}^{\ 4/3}\right)}\Rightarrow r^2=\frac{l_{r1}^{\ 4/3}l_{r2}^{\ 4/3}}{\left(l_{r2}^{\ 2/3}+l_{r1}^{\ 2/3}\right)}\Rightarrow r=\frac{l_{r1}^{\ 2/3}l_{r2}^{\ 2/3}}{\sqrt{l_{r1}^{\ 2/3}+l_{r2}^{\ 2/3}}}$$

Exemple : *Cône sphérique plein d'angle θ_0, en coordonnées sphériques (r,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $r=l_r$. et de Neumann homogènes en θ_0*

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))$$
$$T'_\theta(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$$
$$T(r,\theta)\ fini$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir :

$$T(r,\theta)\ fini$$
$$T(r,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(r,-\theta)=T(r,\theta)$$
$$T(r,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularit\acute{e}\ en\ \theta=0,\ continue\ et\ d\acute{e}rivable$$

Pour respecter la condition aux limites $T'_\theta(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$ *, on est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier λ_n* $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$ *, ce qui donne la condition suivante pour établir les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville.*

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\,;\,\frac{dP_{\lambda_n}(z)}{dz}\bigg|_{z=\mu_0}=0\quad \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}=\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(zP_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)\right)\quad \forall\lambda_n>0\in\Re\ ou\ \mathbf{N}$$
$$\Rightarrow\frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)=0$$
$$\Rightarrow\lambda_n=0\ ou\ \mu_0P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)=0$$

<u>Exemple</u> si l'on prend la valeur $\theta_0=\pi/2$*, alors on retrouve les valeurs propres λ_n =2n n≥0,*

si l'on prend l'angle $\theta_0=\pi/3$*, alors les 21 premières valeurs propres λ_n =* 0, 3.19569, 6.21953, 9.22885, 12.2338, 15.2369, 18.239, 21.2405, 24.2416, 27.2426, 30.2433, 33.2439, 36.2444, 39.2448, 42.2452, 45.2455, 48.2458, 51.246, 54.2462, 57.2464, 60.2466

si l'on prend l'angle $\theta_0=\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres λ_n =* 0, 8.05252, 15.14, 22.1738, 29.1917, 36.2028, 43.2104, 50.2158, 57.22, 64.2232, 71.2258, 78.228, 85.2298, 92.2313, 99.2326, 106.234, 113.235, 120.236, 127.236, 134.237, 141.238

En respectant la contrainte de finitude et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme d'une série :

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq0,+\infty}\left(A_nr^{-(\lambda_n+1)}+B_nr^{\lambda_n}\right)P_{\lambda_n}(Cos(\theta))=\sum_{n\neq0,+\infty}B_nr^{\lambda_n}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l$_r$, donne, en incluant la valeur propre 0 (dû à la condition homogène de Neumann):

$$P_0(z) = 1$$

$$B_n = \int_0^{\vartheta_0} d\vartheta \; Sin(\theta) \; f_\theta(Cos(\theta)) \; P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_0 = \int_{\mu_0}^{1} dz \; f_\theta(z) \quad B_n = -\int_1^{\mu_0} dz \; f_\theta(z) \; P_{\lambda_n}(z) = \int_{\mu_0}^{1} dz \; f_\theta(z) \; P_{\lambda_n}(z)$$

$$\left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz \; P_{\lambda_n}(z)^2 \quad \left\| P_0(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz = 1 - \mu_0$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0 \; ou \; \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) = 0$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0} + \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{B_n}{\left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2} \left(\frac{r}{l_r} \right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Selon les formules pour le calcul de la norme d'une fonction de Legendre de degré non entier :

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \; P_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\left[(1-z^2) \left(\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n} \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} - P_{\lambda_n}(z) \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n \, \partial z} \right) \right]_{z_1}^{z_2}}{(2\lambda_n + 1)} \quad posons \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$C.L. \quad \left. \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} \right|_{z=\mu_0} = 0 \quad et \quad \forall \lambda_n, P_{\lambda_n}(1) = 0$$

$$comme \; \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} = \frac{\lambda_n}{z^2 - 1} \left(z P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z) \right) \Rightarrow (z^2 - 1) \left. \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} \right|_{z=1} = 0 \quad et$$

$$\Rightarrow \int_{\mu_0}^{1} dz \; P_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\left[(1-z^2) \left(\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n} \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} - P_{\lambda_n}(z) \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda_n \, \partial z} \right) \right]_{\mu_0}^{1}}{(2\lambda_n + 1)}$$

$$= \frac{((1-\mu_0{}^2) \left(-\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n} \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial z} + P_{\lambda_n}(\mu_0) \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n \, \partial z} \right))}{(2\lambda_n + 1)} \quad or \quad \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial z} = 0 \Leftarrow C.L.$$

$$= \frac{(1-\mu_0{}^2) P_{\lambda_n}(\mu_0) \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n \, \partial z}}{(2\lambda_n + 1)}$$

$$\left\| P_{\lambda_n}(z)^2 \right\| = \frac{(1-\mu_0{}^2) P_{\lambda_n}(\mu_0) \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n \, \partial z}}{(2\lambda_n + 1)}$$

développons la dérivée seconde :

$$\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} = \lambda_n \frac{zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)}{z^2 - 1} \Rightarrow \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\lambda_n \frac{zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)}{z^2 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)}{z^2 - 1} + \frac{\lambda_n}{z^2 - 1}\left(z\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(z)}{\partial \lambda}\right)$$

$$or \; \frac{zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)}{z^2 - 1} = \frac{1}{\lambda_n}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{1}{\lambda_n}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} + \frac{\lambda_n}{z^2 - 1}\left(z\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(z)}{\partial \lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z}\right|_{z=\mu_0} = \frac{1}{\lambda_n}\left.\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}\right|_{z=\mu_0} + \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\;2} - 1}\left(\mu_0\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z}\right|_{z=\mu_0} = \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\;2} - 1}\left(\mu_0\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)$$

On obtient la valeur de la norme de la fonction de Legendre de degré non entier, solution du problème de Sturm-Liouville avec des conditions adiabatiques :

$$\left\| P_{\lambda_n}(z)^2 \right\| = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n + 1)} P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)$$

on obtient le même résultat avec la formule générale sur les normes

$$\int_{\mu_0}^{1} dz\, \Phi_p(z)^2 = \frac{\left[\Phi_p(z)\left(z\Phi_p(z) - \Phi_{p-1}(z)\right) + p\left(\Phi_{p-1}(z)\frac{\partial \Phi_p(z)}{\partial p} - \Phi_p(z)\frac{\partial \Phi_{p-1}(z)}{\partial p}\right)\right]_{\mu_0}^{1}}{(2p+1)} \qquad \Phi_p(z) = P_{\lambda_n}(z)$$

$$= \frac{\lambda_n\left(P_{\lambda_n}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda_n} - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}\right)}{(2\lambda_n + 1)} \qquad comme \quad P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) = \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)$$

$$\left\| P_{\lambda_n}(z)^2 \right\| = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n + 1)} P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)$$

On retrouve la valeur de la norme de fonctions de Legendre de degré entier pair, qui correspond au cas $\vartheta_0=\pi/2$:

$$\lambda_n = 0 \ ou \ \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n -1}(\mu_0) = 0$$

$$\mu_0 = Cos(\pi/2) = 0 \Rightarrow P_{\lambda_n -1}(0) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 2n \quad tq \quad n \geq 0$$

$$on \ a \ vu \ que \ P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$\|P_{2n}(z)\|^2 = (-1)^n \frac{2n}{(4n+1)} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n -1} = (-1)^n \frac{2n}{(4n+1)} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=2n-1}$$

$$cas \ C.L. \ Dirichlet \Rightarrow \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=2n+1} = -(-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=2n-1} = (-1)^n \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = (-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{4n^2(2n-1)!} = (-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{2n(2n)!}$$

$$\Rightarrow \|P_{2n}(z)\|^2 \to \frac{1}{4n+1} \quad résultat \ établi \ précédemment \quad \forall n \in \mathrm{N}, \int_0^1 dz \, (P_n(z))^2 = \frac{1}{(2n+1)}$$

La solution du problème s'écrit donc :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_0 = \int_{\mu_0}^1 dz \ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{\mu_0}^1 dz \ f_\theta(z) \, P_{\lambda_n}(z)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0 \ ou \ \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n -1}(\mu_0) = 0$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{2\lambda_n+1}{\lambda_n} \frac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n -1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$ alors on a :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad \lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0 \ ou \ \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n -1}(\mu_0) = 0$$

$$B_0 = 1-\mu_0 \quad B_n = \int_{\mu_0}^1 dz \ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n+1}(z) - P_{\lambda_n -1}(z)\right]_{\mu_0}^1 = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left(P_{\lambda_n -1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n+1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)$$

$$en \ utilisant \ la \ forme \ alternative \ de \ l'intégrale \ indéfinie \int dz \ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{\lambda_n+1}\left[zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n -1}(z)\right]$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^1 dz \ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{\lambda_n+1}\left[zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n -1}(z)\right]_{\mu_0}^1 = \frac{1}{\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n -1}(\mu_0) - \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)\right] = 0$$

$$\Rightarrow T(r,\theta) = \frac{1-\mu_0}{1-\mu_0} = 1$$

Et l'on retrouve bien la solution triviale $T(r,\vartheta)=1$

A titre d'illustration, choisissons une autre fonction limite de profil :

$f_\theta(\theta) = 1 - Heaviside(\theta - \theta_1) \quad avec\ \theta_1 \in \left]0, \theta_0\right[$

$et\ posons\ \mu_1 = Cos(\theta_1)$

$$B_0 = \int_{\mu_1}^{1} dz = (1-\mu_1) \quad B_n = \int_{\mu_1}^{1} dz\, P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n+1}(z) - P_{\lambda_n-1}(z)\right]_{\mu_1}^{1} = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1)\right]$$

Il vient la solution suivante :

$\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad \mu_1 = Cos(\theta_1)$

$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0\ ou\ \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0) = 0$

$$T(r,\theta) = \frac{1-\mu_1}{1-\mu_0} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)} \left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

<u>Considération sur les valeurs propres du problème aux limites solution d'équation transcendantales.</u>

On a vu que pour les deux problèmes précédents, les valeurs propres étaient déterminées par la résolution d'une équation transcendantales de la forme :

$\mu_0 = Cos(\theta_0)$

$Problème\ de\ Dirichlet$

$\lambda_n \quad tq \quad P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$

$Problème\ de\ Neumann$

$$\lambda_n \quad tq \quad \left.\frac{dP_{\lambda_n}(z)}{dz}\right|_{z=\mu_0} = 0$$

Il est possible d'expliciter quels sont ces valeurs propres dans les cas limites d'angle d'ouverture faible ou au contraire très ouvert. De nombreux travaux ont été effectué sur le sujet essentiellement entre 1900 et 1960. Les résultats obtenus sont remarquablement résumés dans l'ouvrage de référence de Louis Robin de 1959 : « Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales Tome III »

<u>Estimation des valeurs propres du problème de Dirichlet sur le cône sphérique</u>

Ces résultats portent sur les racines de l'équation sur les fonctions associés de Legendre dont l'ordre est entier .

Tout d'abord, les racines de l'équation $\lambda_n \quad tq \quad P_{\lambda_n}^m(Cos(\theta_0)) = 0$ *avec m réel ou entier et* ϑ_0 *donnés ne peuvent être complexes. Les solutions sont donc nécessairement réels, et d'autre part elles sont en nombre infini (résultat de Sturm-Liouville).*

De plus suivant la formule sur les fonctions de Legendre associées :

$P_{\lambda_n}^m(z) = P_{-\lambda_n-1}^m(z)$

$\Rightarrow pour\ toute\ racine\ \lambda_n\ de\ l'équation\ P_{\lambda_n}^m(Cos(\vartheta_0)) = 0\ il\ correspond\ la\ racine - \lambda_n - 1$

Le calcul des racines de l'équation, fait appel à un développement asymptotique des fonctions de Legendre valable lorsque les degrés sont assez grands et l'angle d'ouverture loin des valeurs limites 0 et π, utilisé dans un article de MacDonald de 1900 « Zeroes of the Spherical Harmonic, considered as a function of N ». Dans cet article il utilise le développement pour des ordres entiers négatifs, sachant que de toute façon les zéros des fonctions associées de Legendre d'ordre positif et négatif sont strictement identiques, en vertu de la relation :

$$P_{\lambda_n}^{-m}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma(\lambda_n - m + 1)}{\Gamma(\lambda_n + m + 1)} P_{\lambda_n}^{m}(z) \Leftrightarrow P_{\lambda_n}^{m}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma(\lambda_n + m + 1)}{\Gamma(\lambda_n - m + 1)} P_{\lambda_n}^{-m}(z).$$

D'après cette formule, on peut remarquer pour les zéros de $P_{\lambda_n}^{m}(z)$ qu'en plus des zéros de $P_{\lambda_n}^{-m}(z)$, il y a les pôles de la fonction $\Gamma(\lambda_n - m + 1)$, donc les valeurs $\lambda_n \in \{0,1,2,\cdots,m-1\}$ doivent être systématiquement ajoutées lorsque l'on déduit les zéros des ordres positifs d'après ceux des ordres négatifs.

Dans la suite de nos calculs, contrairement à la reprise des résultats faîte dans l'ouvrage de L.Robin, on préfère partir du développement d'ordre négatif ainsi que dans l'article de MacDonald :

$$P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\theta_0)) = \frac{\Gamma(\lambda_n - m + 1)}{\Gamma\left(\lambda_n + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} Cos\left(\lambda_n\theta_0 - m\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \\ + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\left\{ \begin{array}{l} (1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots((2p-1)^2 - 4m^2) \times \\ \times Cos\left(\lambda_n\theta_0 - m\frac{\pi}{2} - (2p+1)\frac{\beta}{2}\right) \end{array} \right\}}{2^{2p}\, p!(2\lambda_n + 3)(2\lambda_n + 5)\cdots(2\lambda_n + 2p + 1) Sin^p(\theta_0)} \end{array} \right\} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \theta_0$$

Transformons cette expression en utilisant la fonction bifactorielle :

$$(2\lambda_n + 3)(2\lambda_n + 5)\cdots(2\lambda_n + 2p + 1) = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2\lambda_n + 1) \times (2\lambda_n + 3)(2\lambda_n + 5)\cdots(2\lambda_n + 2p + 1)}{1 \times 3 \times \cdots \times (2\lambda_n + 1)} =$$

$$= \frac{(2\lambda_n + 2p + 1)!!}{(2\lambda_n + 1)!!} \qquad (1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots((2p-1)^2 - 4m^2) = \prod_{l=0}^{l=p-1}\left((2l+1)^2 - 4m^2\right)$$

$$\Leftrightarrow P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\theta_0)) = \frac{\Gamma(\lambda_n - m + 1)}{\Gamma\left(\lambda_n + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} Cos\left(\lambda_n\theta_0 - m\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \\ + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\left\{ \begin{array}{l} \left[\prod_{l=0}^{l=p-1}\left((2l+1)^2 - 4m^2\right)\right] \times (2\lambda_n + 1)!! \times \\ \times Cos\left(\lambda_n\theta_0 - m\frac{\pi}{2} - (2p+1)\frac{\beta}{2}\right) \end{array} \right\}}{2^{2p}\, p!(2\lambda_n + 2p + 1)!!\, Sin^p(\theta_0)} \end{array} \right\}$$

Pour les fonctions de Legendre de première espèce, m=0, il vient :

$$\left(1^2\right)\left(3^2\right)\cdots\left((2p-1)^2\right)=\left(1\times 3\times\cdots\times(2p-1)\right)^2=\left((2p-1)!!\right)^2$$

$$(2n+1)!!=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\quad (2n-1)!!=\frac{2^{n}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\quad (2p-1)!!=\frac{2^{p}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

$$(2\lambda_n+1)!!=\frac{2^{\lambda_n+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\lambda_n+\frac{3}{2}\right)\qquad (2\lambda_n+2p+1)!!=\frac{2^{\lambda_n+p+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\lambda_n+p+\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow P^0_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=\frac{\Gamma(\lambda_n+1)(2\lambda_n+1)!!}{\Gamma\left(\lambda_n+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{Cos\left(\lambda_n\theta_0-\frac{\beta}{2}\right)}{(2\lambda_n+1)!!}+\\ +\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{((2p-1)!!)^2Cos\left(\lambda_n\theta_0-(2p+1)\frac{\beta}{2}\right)\right\}}{2^{2p}\,p!(2\lambda_n+2p+1)!!Sin^p(\theta_0)}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda_n+1)2^{\lambda_n+1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^2Cos\left(\lambda_n\theta_0-\frac{\beta}{2}\right)}{2^{\lambda_n+1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\lambda_n+\frac{3}{2}\right)}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\left(\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)^2Cos\left(\lambda_n\theta_0-(2p+1)\frac{\beta}{2}\right)\right\}}{2^{\lambda_n+1+p}\sqrt{\pi}\,p!\Gamma\left(\lambda_n+p+\frac{3}{2}\right)Sin^p(\theta_0)}\right\}$$

$en\ posant\ 0!=1$

$$P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=\frac{\Gamma(\lambda_n+1)}{\pi}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\left\{\left(\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)^2Cos\left(\lambda_n\theta_0-(2p+1)\frac{\beta}{2}\right)\right\}}{p!\Gamma\left(\lambda_n+p+\frac{3}{2}\right)[2Sin(\theta_0)]^p}\right\}$$

Cette dernière formule peut également se généraliser dans le cadre des fonctions de Gegenbauer de première espèce. Ce type de formule servira également pour la détermination approchée des zéros des fonctions de Gegenbauer (pour des valeurs restreinte du paramètre dimensionnel) pour des valeurs fixes de l'angle ϑ_0. Par ailleurs L.Robin précise dans son livre que cette série converge pour des valeurs de ϑ_0 entre [π/6, 5π/6].

En première approximation, les racines de l'équation pour les grandes valeurs λ_n correspondent à l'annulation du terme en cosinus, en négligeant les termes $1/\lambda_n$ de la série :

$$Cos\left(\lambda_n\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)\right)=0\Rightarrow\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\theta_0=2m\frac{\pi}{4}+(4n+3)\frac{\pi}{4}\Rightarrow\lambda_n=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4\theta_0}(4n+2m+3)$$

Cette formule donne pour une fonction de Legendre de première, en posant m=0 :

$$\lambda_n=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4\theta_0}(4n+3)$$

.

Et le développement asymptotique de la fonction associée est le suivant en première approximation :

$$P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\theta)) \approx \frac{\Gamma(\lambda_n - m + 1)}{\Gamma\left(\lambda_n + \frac{3}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{Cos\left(\lambda_n\theta_0 - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_0}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right\} \quad Lorsque\ \lambda_n \to \infty$$

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \approx z^{a-b}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \Rightarrow P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\theta)) \approx \lambda_n^{\lambda_n - m + 1 - \lambda_n - \frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{Sin\left(\lambda_n\theta_0 - m\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\theta)) \approx \lambda_n^{-m-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{Sin\left(\lambda_n\theta_0 - m\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right\}$$

$$P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\theta)) \approx \lambda_n^{-m}\left(\frac{2}{\lambda_n\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{Sin\left(\lambda_n\theta_0 - \frac{\theta_0}{2} - m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right\}$$

En posant m=0, il vient pour la fonction de Legendre de première espèce ::

$$P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \approx \left(\frac{2}{\lambda_n\pi\ Sin(\theta)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{Sin\left(\lambda_n\theta - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right\}.$$

qui est l'expression donnée dans l'ouvrage de N.N.Lebedev «SPECIAL FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS, Prentice Hall 1965 ». Au passage on remarque que l'écart entre deux valeurs propres asymptotiques est de $\lambda_n+1- \lambda_n= \pi/\vartheta_0$. N.N.Lebedev donne également le développement asymptotique pour les grandes valeurs du degré des fonctions de Legendre de deuxième espèce. Développement qui peut servir pour estimer les racines à grande valeur dans les problèmes de section coniques sphériques creuses :

$$Q_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \approx \left(\frac{\pi}{2\lambda_n\ Sin(\theta)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{Cos\left(\lambda_n\theta - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right\}$$

En meilleur approximation, la méthode de calcul des racines est plus complexe, elle se base sur l'expression d'un développement limité de la formule introduite dans un article de MacDonald :

$$Posons \quad x = \lambda_n + \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda_n\theta_0 - m\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\theta_0 - m\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_0}{2}\right) = (x-1)\theta_0 - (2m+1)\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{(2\lambda_n + 3)}{2} = x \quad \frac{(2\lambda_n + 5)}{2} = x + 1 \quad \frac{(2\lambda_n + 7)}{2} = x + 2 \quad \frac{(2\lambda_n + 2p + 1)}{2} = \frac{(2\lambda_n + 3 + 2p - 2)}{2} = x + p - 1$$

$$P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\theta_0)) = \frac{\Gamma(\lambda_n - m + 1)}{\Gamma\left(\lambda_n + \frac{3}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\begin{array}{l} Cos\left(\theta_0(x-1) - (2m+1)\frac{\pi}{4}\right) + \\ + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots\left((2p-1)^2 - 4m^2\right)\times \\ \times Cos\left(\theta_0(x-1) - (2m+1)\frac{\pi}{4} - p\beta\right)\end{array}\right\}}{2^{3p}\, p!\, x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}\end{array}\right\}$$

$$Equation \quad P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\theta_0)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$Cos\left(\theta_0(x-1) - (2m+1)\frac{\pi}{4}\right) + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots\left((2p-1)^2 - 4m^2\right)\times \\ \times Cos\left(\theta_0(x-1) - (2m+1)\frac{\pi}{4} - p\beta\right)\end{array}\right\}}{2^{3p}\, p!\, x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)} = 0$$

Ce qui donne en développant le cosinus de la sommation :

$$Cos\left(\theta_0(x-1)-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{aligned}&(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)\times\\&\times\left(Cos\left(\theta_0(x-1)-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Cos(p\beta)+Sin\left(\theta_0(x-1)-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Sin(p\beta)\right)\end{aligned}\right\}}{2^{3p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}=0$$

$$\Leftrightarrow Cotan\left(\theta_0(x-1)-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Cos(p\beta)}{2^{3p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}\right)$$

$$=-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Sin(p\beta)}{2^{3p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}$$

$$\Leftrightarrow Cotan\left(\theta_0(x-1)-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Sin(p\beta)}{2^{3p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}}{\left(1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Cos(p\beta)}{2^{3p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}\right)}$$

$$De\ plus\ Cotan(z)=Tan\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

$$\Rightarrow Cotan\left(\theta_0(x-1)-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)=Tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0(x-1)-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)=Tan\left((3+2m)\frac{\pi}{4}-\theta_0(x-1)\right)$$

$$\Leftrightarrow Tan\left((3+2m)\frac{\pi}{4}-\theta_0(x-1)\right)=\frac{-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Sin(p\beta)}{2^{3p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}}{\left(1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Cos(p\beta)}{2^{3p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}\right)}$$

Si l'on pose :

$$U(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Sin(p\beta)}{2^{3p}\,p!\,x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}}{\left(1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Cos(p\beta)}{2^{3p}\,p!\,x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}\right)}$$

$$\Leftrightarrow Tan\left((3+2m)\frac{\pi}{4}-\theta_0(x-1)\right)=-U(x)$$

$$\Leftrightarrow (3+2m)\frac{\pi}{4}-\theta_0(x-1)=-Arctan(U(x))-n\pi \Leftrightarrow (3+2m)\frac{\pi}{4}+Arctan(U(x))-n\pi=\theta_0(x-1)\quad n\in\mathbf{N}$$

$$\Leftrightarrow x=1+\frac{(3+2m+4n)\frac{\pi}{4}+Arctan(U(x))}{\theta_0}=1+\frac{\pi}{4\theta_0}(3+2m+4n)+\frac{Arctan(U(x))}{\theta_0}$$

$$Posons\quad t=1+\frac{\pi}{4\theta_0}(3+2m+4n)\Leftrightarrow x=t+\frac{Arctan(U(x))}{\theta_0}$$

On sait que la solution d'ordre zéro de l'équation transcendantale est donnée par :

$$\lambda_n=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4\theta_0}(4n+2m+3)\Leftrightarrow t=\lambda_n+\frac{3}{2}$$

La variable t est donc la valeur d'ordre 0 de l'inconnu x, à partir de laquelle on calcule les termes plus élevés du développement. Il convient donc plutôt de noter t comme suit : x_0. L'équation transcendantale prend donc également la forme :

$$Posons\quad x_0=1+\frac{\pi}{4\theta_0}(3+2m+4n)\quad \psi=(x-x_0)\theta_0$$

$$U(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Sin(p\beta)}{2^{3p}\,p!\,x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}}{\left(1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Cos(p\beta)}{2^{3p}\,p!\,x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}\right)}$$

$$\Rightarrow U(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Sin(p\beta)}{2^{2p}\,p!\,x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)(2Sin(\theta_0))^p}}{\left(1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)Cos(p\beta)}{2^{2p}\,p!\,x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)(2Sin(\theta_0))^p}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}Tan((x-x_0)\theta_0)=U(x)\Leftrightarrow x=x_0+\dfrac{Arctan(U(x))}{\theta_0}\\ Tan(\psi)=U(x)\Leftrightarrow \psi=Arctan(U(x))\end{cases}$$

Ce sont les diverses formes employées dans le livre de L.Robin et l'article de MacDonald.

Donnons le développement de la fonction U(x) autour de x_0 :

$$U(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta)}{2^{3p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}}{\left(1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta)}{2^{3p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)Sin^p(\theta_0)}\right)}$$

$$\Rightarrow U(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta)}{2^{2p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)(2Sin(\theta_0))^p}}{\left(1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta)}{2^{2p}\,p!x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)(2Sin(\theta_0))^p}\right)}$$

$$Posons\quad b_1=\frac{(1^2-4m^2)Sin(\beta)}{2^{2\times1}[2Sin(\theta_0)]}\quad b_2=\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)Sin(2\beta)}{2^{2\times2}2![2Sin(\theta_0)]^2}\quad b_3=\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)Sin(3\beta)}{2^{2\times3}3![2Sin(\theta_0)]^3}$$

$$\cdots b_p=\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta)}{2^{2p}\,p![2Sin(\theta_0)]^p}$$

$$Posons\quad a_1=\frac{(1^2-4m^2)Cos(\beta)}{2^{2\times1}[2Sin(\theta_0)]}\quad a_2=\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)Cos(2\beta)}{2^{2\times2}2![2Sin(\theta_0)]^2}\quad a_3=\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)Cos(3\beta)}{2^{2\times3}3![2Sin(\theta_0)]^3}$$

$$\cdots a_p=\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta)}{2^{2p}\,p![2Sin(\theta_0)]^p}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}N(x)=\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x(x+1)}+\cdots+\frac{b_p}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)}\\ D(x)=1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x(x+1)}+\cdots+\frac{a_p}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)}\end{cases}$$

On retrouve le développement de MacDonald, retranchant 1 à la variable x, y=x-1 :

$Si\quad y=x-1$

$$\Rightarrow\begin{cases}N(y)=\frac{b_1}{(y+1)}+\frac{b_2}{(y+1)(y+2)}+\cdots+\frac{b_p}{(y+1)(y+2)\cdots(y+p)}\\ D(y)=1+\frac{a_1}{(y+1)}+\frac{a_2}{(y+1)(y+2)}+\cdots+\frac{a_p}{(y+1)(y+2)\cdots(y+p)}\end{cases}$$

MacDonald donne une expression intermédiaire de N(y)/D(y), due à la propriété suivante du développement :

$$\frac{1}{D(y)}=\frac{1}{1+C(y)}\approx 1-C(y)+C^2(y)-C^3(y)$$

$$C(y)=\frac{a_1}{(y+1)}+\frac{a_2}{(y+1)(y+2)}+\cdots+\frac{a_p}{(y+1)(y+2)\cdots(y+p)}$$

$$N(y)=\frac{b_1}{(y+1)}+\frac{b_2}{(y+1)(y+2)}+\cdots+\frac{b_p}{(y+1)(y+2)\cdots(y+p)}$$

$$\frac{N(y)}{D(y)}\approx\left(\frac{b_1}{(y+1)}+\frac{b_2}{(y+1)(y+2)}+\cdots+\right)\left(1-C(y)+C^2(y)-C^3(y)+\cdots\right)$$

au troisième ordre $\rightarrow$

$$C(y)\approx\frac{a_1}{(y+1)}+\frac{a_2}{(y+1)(y+2)}+\frac{a_3}{(y+1)(y+2)(y+3)}+\cdots$$

$$C^2(y)\approx\frac{a_1^{\,2}}{(y+1)^2}+\frac{2a_1a_2}{(y+1)^2(y+2)}+\cdots$$

$$C^3(y)\approx\frac{a_1^{\,3}}{(y+1)^3}+\cdots$$

$$1-C(y)+C^2(y)-C^3(y)\approx\left\{\begin{array}{l}1-\left[\frac{a_1}{(y+1)}+\frac{a_2}{(y+1)(y+2)}+\frac{a_3}{(y+1)(y+2)(y+3)}\right]+\\+\frac{a_1^{\,2}}{(y+1)^2}+\frac{2a_1a_2}{(y+1)^2(y+2)}-\frac{a_1^{\,3}}{(y+1)^3}+\cdots\end{array}\right\}$$

$$\left(\frac{b_1}{(y+1)}+\frac{b_2}{(y+1)(y+2)}+\frac{b_3}{(y+1)(y+2)(y+3)}+\cdots\right)\times$$

$$\left\{\begin{array}{l}1-\left[\frac{a_1}{(y+1)}+\frac{a_2}{(y+1)(y+2)}+\frac{a_3}{(y+1)(y+2)(y+3)}\right]+\\+\frac{a_1^{\,2}}{(y+1)^2}+\frac{2a_1a_2}{(y+1)^2(y+2)}-\frac{a_1^{\,3}}{(y+1)^3}+\cdots\end{array}\right\}\approx$$

$$\approx\left\{\begin{array}{l}\frac{b_1}{(y+1)}+\frac{b_2}{(y+1)(y+2)}+\frac{b_3}{(y+1)(y+2)(y+3)}-\\-\left[\frac{a_1b_1}{(y+1)^2}+\frac{a_1b_2}{(y+1)^2(y+2)}\right]-\left[\frac{a_2b_1}{(y+1)^2(y+2)}\right]+\frac{a_1^{\,2}b_1}{(y+1)^3}+\cdots\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{N(y)}{D(y)}\approx\frac{c_1}{(y+1)}+\frac{c_2}{(y+1)^2}+\frac{c_3}{(y+1)^3}+\frac{d_2}{(y+1)(y+2)}+\frac{d_3}{(y+1)^2(y+2)}+\frac{e_3}{(y+1)(y+2)(y+3)}$$

$$c_1=b_1\quad c_2=-a_1b_1\quad c_3=a_1^{\,2}b_1\quad d_2=b_2\quad d_3=-a_1b_2-a_2b_1\quad e_3=b_3$$

.

Au quatrième ordre cela donne :

$$\text{au quatrième ordre} \to$$

$$C(y) \approx \frac{a_1}{(y+1)} + \frac{a_2}{(y+1)(y+2)} + \frac{a_3}{(y+1)(y+2)(y+3)} + \frac{a_4}{(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)} + \cdots$$

$$C^2(y) \approx \frac{a_1^{\ 2}}{(y+1)^2} + \frac{2a_1a_2}{(y+1)^2(y+2)} + \frac{a_2^{\ 2}}{(y+1)^2(y+2)^2} + \frac{2a_1a_3}{(y+1)^2(y+2)(y+3)} + \cdots$$

$$C^3(y) \approx \frac{a_1^{\ 3}}{(y+1)^3} + \frac{3a_1a_2}{(y+1)^3(y+2)} + \cdots$$

$$N(y) = \frac{b_1}{(y+1)} + \frac{b_2}{(y+1)(y+2)} + \frac{b_3}{(y+1)(y+2)(y+3)} + \frac{b_4}{(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)}$$

$$1 - C(y) + C^2(y) - C^3(y) \approx \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left[\frac{a_1}{(y+1)} + \frac{a_2}{(y+1)(y+2)} + \frac{a_3}{(y+1)(y+2)(y+3)} + \frac{a_4}{(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)} \right] + \\ + \frac{a_1^{\ 2}}{(y+1)^2} + \frac{2a_1a_2}{(y+1)^2(y+2)} + \frac{a_2^{\ 2}}{(y+1)^2(y+2)^2} + \frac{2a_1a_3}{(y+1)^2(y+2)(y+3)} - \\ - \left[\frac{a_1^{\ 3}}{(y+1)^3} + \frac{3a_1a_2}{(y+1)^3(y+2)} \right] + \cdots \end{array} \right\}$$

$$\frac{N(y)}{D(y)} \approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1}{(y+1)} + \frac{b_2}{(y+1)(y+2)} + \frac{b_3}{(y+1)(y+2)(y+3)} + \frac{b_4}{(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)} - \\ - \left[\frac{a_1b_1}{(y+1)^2} + \frac{a_2b_1}{(y+1)^2(y+2)} + \frac{a_3b_1}{(y+1)^2(y+2)(y+3)} \right] - \\ - \left[\frac{a_1b_2}{(y+1)^2(y+2)} + \frac{a_2b_2}{(y+1)^2(y+2)^2} \right] - \frac{a_1b_3}{(y+1)^2(y+2)(y+3)} + \\ + \frac{a_1^{\ 2}b_1}{(y+1)^3} + \frac{a_1^{\ 2}b_2}{(y+1)^3(y+2)} + \frac{2a_1a_2b_1}{(y+1)^3(y+2)} - \frac{a_1^{\ 3}b_1}{(y+1)^4} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{N(y)}{D(y)} \approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1}{(y+1)} - \frac{a_1b_1}{(y+1)^2} + \frac{a_1^{\ 2}b_1}{(y+1)^3} - \frac{a_1^{\ 3}b_1}{(y+1)^4} + \frac{b_2}{(y+1)(y+2)} - \frac{a_2b_1 + a_1b_2}{(y+1)^2(y+2)} + \frac{2a_1a_2b_1 + a_1^{\ 2}b_2}{(y+1)^3(y+2)} + \\ + \frac{b_3}{(y+1)(y+2)(y+3)} - \frac{a_2b_2}{(y+1)^2(y+2)^2} - \frac{a_1b_3 + a_3b_1}{(y+1)^2(y+2)(y+3)} + \frac{b_4}{(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{N(y)}{D(y)} \approx \frac{c_1}{(y+1)} + \frac{c_2}{(y+1)^2} + \frac{c_3}{(y+1)^3} + \frac{c_4}{(y+1)^4} + \frac{d_2}{(y+1)(y+2)} + \frac{d_3}{(y+1)^2(y+2)} + \frac{d_4}{(y+1)^3(y+2)} +$$

$$+ \frac{e_3}{(y+1)(y+2)(y+3)} + \frac{e_4}{(y+1)^2(y+2)^2} + \frac{f_4}{(y+1)^2(y+2)(y+3)} + \frac{g_4}{(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)}$$

$$c_1 = b_1 \quad c_2 = -a_1b_1 \quad c_3 = a_1^{\ 2}b_1 \quad c_4 = -a_1^{\ 3}b_1$$

$$d_2 = b_2 \quad d_3 = -a_1b_2 - a_2b_1 \quad d_4 = 2a_1a_2b_1 + a_1^{\ 2}b_2$$

$$e_3 = b_3 \quad e_4 = -a_2b_2 \quad f_4 = -a_1b_3 - a_3b_1 \quad g_4 = b_4$$

.

Retranscrit dans la variable x, cela donne au quatrième ordre :

$$\Rightarrow U(x)=\frac{N(x)}{D(x)}\approx\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{x^3}+\frac{c_4}{x^4}+\frac{d_2}{x(x+1)}+\frac{d_3}{x^2(x+1)}+\frac{d_4}{x^3(x+1)}+$$

$$+\frac{e_3}{x(x+1)(x+2)}+\frac{e_4}{x^2(x+1)^2}+\frac{f_4}{x^2(x+1)(x+2)}+\frac{g_4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$c_1=b_1 \quad c_2=-a_1b_1 \quad c_3=a_1^2b_1 \quad c_4=-a_1^3b_1$$

$$d_2=b_2 \quad d_3=-a_1b_2-a_2b_1 \quad d_4=2a_1a_2b_1+a_1^2b_2$$

$$e_3=b_3 \quad e_4=-a_2b_2 \quad f_4=-a_1b_3-a_3b_1 \quad g_4=b_4$$

.

On peut également introduire la notation suivante :

$$U(x)=\frac{N(x)}{D(x)}\approx\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \quad \textit{ordre croissant de} \quad \frac{1}{x}$$

$$\textit{avec}\ \alpha_1=\frac{c_1}{x} \quad \alpha_2=\frac{c_2}{x^2}+\frac{d_2}{x(x+1)} \quad \alpha_3=\frac{c_3}{x^3}+\frac{d_3}{x^2(x+1)}+\frac{e_3}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\alpha_4=\frac{c_4}{x^4}+\frac{d_4}{x^3(x+1)}+\frac{e_4}{x^2(x+1)^2}+\frac{f_4}{x^2(x+1)(x+2)}+\frac{g_4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$U'(x_0)\approx\left.\frac{d\alpha_1}{dx}\right|_{x=x_0}+\left.\frac{d\alpha_2}{dx}\right|_{x=x_0}+\left.\frac{d\alpha_3}{dx}\right|_{x=x_0}+\left.\frac{d\alpha_3}{dx}\right|_{x=x_0} \Rightarrow U'(x_0)\approx\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'+\alpha_4'$$

$$\alpha_1'=-\frac{c_1}{x^2}\rightarrow \textit{ordre}\ 2 \qquad \alpha_2'=-\frac{2c_2}{x^3}-d_2\left[\frac{1}{x(x+1)^2}+\frac{1}{x^2(x+1)}\right]\rightarrow \textit{ordre}\ 3$$

$$\alpha_3'=-\frac{3c_3}{x^4}-d_3\left[\frac{1}{x^2(x+1)^2}+\frac{2}{x^3(x+1)}\right]-e_3\left[\frac{(x+1)(x+2)+x(x+2)+x(x+1)}{x^2(x+1)^2(x+2)^2}\right]\rightarrow \textit{ordre}\ 4$$

$$\alpha'_4=-\frac{4c_4}{x^5}-d_4\left[\frac{1}{x^3(x+1)^2}+\frac{3}{x^4(x+1)}\right]-e_4\left[\frac{1}{x^2(x+1)^2(x+2)}+\frac{1}{x^2(x+1)(x+2)^2}+\frac{2}{x^3(x+1)(x+2)}\right]-$$

$$-f_4\left[\frac{x(x+1)(x+2)+x(x+1)(x+3)+x(x+2)(x+3)+(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2}\right]\rightarrow \textit{ordre}\ 5$$

.

Appliquons la formule de Lagrange qui donne le développement d'une fonction analytique quelconque f(z) autour d'une racine de l'équation transcendantale :

$$\textit{Equation} \quad z=z_0+uF(z)$$

$$\textit{Développement de} \quad f(z)\ \textit{autour de}\ z_0$$

$$f(z)=f(z_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left.\left\{f'(t)[F(t)]^k\right\}\right|_{t=z_0}$$

.

Appliquée à l'équation trouvée, il vient :

$$z = x \quad u = \frac{1}{\theta_0} \quad z_0 = x_0 \quad F(x) = Arctan(U(x)) \quad f(x) = x$$

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\theta_0^{\,k} k!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left\{ \left[Arctan(U(t)) \right]^k \right\} \Big|_{t=x_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow \dfrac{1}{\theta_0} \left\{ Arctan(U(x_0)) \right\} \\ k = 2 \rightarrow \dfrac{1}{2!\theta_0^{\,2}} \dfrac{d}{dt} \left\{ \left[Arctan(U(t)) \right]^2 \right\} \Big|_{t=x_0} = \dfrac{Arctan(U(x_0))U'(x_0)}{\theta_0^{\,2}\left(1 + U(x_0)^2\right)} \\ k = 3 \rightarrow \dfrac{1}{6\theta_0^{\,3}} \dfrac{d^2}{dt^2} \left\{ \left[Arctan(U(t)) \right]^3 \right\} \Big|_{t=x_0} = \\ = \dfrac{Arctan(U(x_0)) \left\{ 2\left(U'(x_0)\right)^2 \left[1 - U(x_0) Arctan(U(x_0)) \right] + U''(x_0)\left(1 + \left(U(x_0)\right)^2\right) Arctan(U(x_0)) \right\}}{2\theta_0^{\,3}\left(1 + U(x_0)^2\right)^2} \end{cases}$$

Soit la série

$$x = x_0 + \frac{1}{\theta_0} Arctan(U(x_0)) + \frac{Arctan(U(x_0))}{\theta_0^{\,2}} \frac{U'(x_0)}{1 + \left(U(x_0)\right)^2} +$$

$$+ \frac{Arctan(U(x_0))}{2\theta_0^{\,3}\left(1 + \left(U(x_0)\right)^2\right)^2} \left\{ 2\left(U'(x_0)\right)^2 \left[1 - U(x_0) Arctan(U(x_0)) \right] + U''(x_0)\left(1 + \left(U(x_0)\right)^2\right) Arctan(U(x_0)) \right\} + \cdots$$

De plus si $\left| U(x_0) \right| < 1 \Rightarrow Arctan(U(x_0)) = U(x_0) - \frac{1}{3}\left(U(x_0)\right)^3 + \frac{1}{5}\left(U(x_0)\right)^3 + \cdots$

Rien qu'en se restreignant au deuxième terme en ϑ_0, et en ne développant que les termes maximum de quatrième ordre en x_0 , il vient :

Développement maximum au quatrième ordre

$$Arctan\left(U(x_0)\right)=U(x_0)-\frac{1}{3}\left(U(x_0)\right)^3+\frac{1}{5}\left(U(x_0)\right)^5+\cdots$$

$$x=\left\{\begin{array}{l} x_0+\dfrac{1}{\theta_0}\left\{U(x_0)-\dfrac{1}{3}\left(U(x_0)\right)^3+\dfrac{1}{5}\left(U(x_0)\right)^5+\cdots\right\}+ \\ \dfrac{1}{\theta_0{}^2}\dfrac{\left\{U(x_0)-\dfrac{1}{3}\left(U(x_0)\right)^3+\dfrac{1}{5}\left(U(x_0)\right)^5+\cdots\right\}U'(x_0)}{1+\left(U(x_0)-\dfrac{1}{3}\left(U(x_0)\right)^3+\dfrac{1}{5}\left(U(x_0)\right)^5+\cdots\right)^2}+\cdots \end{array}\right\}$$

Notant $\quad U(x_0)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \quad U'(x_0)=\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'+\alpha_4'$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} U(x_0)-\dfrac{1}{3}\left(U(x_0)\right)^3+\dfrac{1}{5}\left(U(x_0)\right)^5\approx\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-\dfrac{1}{3}\left(\alpha_1{}^3+3\alpha_1{}^2\alpha_2\right) \\ U'(x_0)\approx\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3' \\ \left\{U(x_0)-\dfrac{1}{3}\left(U(x_0)\right)^3+\dfrac{1}{5}\left(U(x_0)\right)^5+\cdots\right\}U'(x_0)\approx\alpha_1\alpha_1'+\alpha_2'\alpha_1+\alpha_1'\alpha_2 \\ \dfrac{1}{1+\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\right)^2}\approx 1-\left(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_3\right) \\ \dfrac{\alpha_1\alpha_1'+\alpha_2\alpha_1'+\alpha_1'\alpha_2}{1+\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\right)^2}\approx\alpha_1\alpha_1'+\alpha_1\alpha_2'+\alpha_1'\alpha_2 \end{array}\right.$$

$$x=x_0+\frac{1}{\theta_0}\left\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-\frac{1}{3}\left(\alpha_1{}^3+3\alpha_1{}^2\alpha_2\right)\right\}+\frac{1}{\theta_0{}^2}\left\{\alpha_1\alpha_1'+\alpha_1\alpha_2'+\alpha_1'\alpha_2\right\}+\cdots$$

En portant les valeurs :

$$c_1=b_1 \quad c_2=-a_1b_1 \quad c_3=a_1{}^2b_1 \quad c_4=-a_1{}^3b_1$$

$$d_2=b_2 \quad d_3=-a_1b_2 \quad d_4=2a_1a_2b_1+a_1{}^2b_2$$

$$e_3=b_3 \quad e_4=-a_2b_2 \quad f_4=-a_1b_3-a_3b_1 \quad g_4=b_4$$

$$\alpha_1=\frac{c_1}{x_0} \quad \alpha_2=\frac{c_2}{x_0{}^2}+\frac{d_2}{x_0\left(x_0+1\right)} \quad \alpha_3=\frac{c_3}{x_0{}^3}+\frac{d_3}{x_0{}^2\left(x_0+1\right)}+\frac{e_3}{x_0\left(x_0+1\right)\left(x_0+2\right)}$$

$$\alpha_4=\frac{c_4}{x^4}+\frac{d_4}{x^3\left(x+1\right)}+\frac{e_4}{x^2\left(x+1\right)^2}+\frac{f_4}{x^2\left(x+1\right)\left(x+2\right)}+\frac{g_4}{x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)}$$

$$\alpha_1'=-\frac{c_1}{x_0{}^2} \qquad \alpha_2'=-\frac{2c_2}{x_0{}^3}-\frac{d_2}{x_0{}^2\left(x_0+1\right)}-\frac{d_2}{x_0\left(x_0+1\right)^2}$$

$$x\approx x_0+\frac{1}{\theta_0}\left\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-\frac{1}{3}\left(\alpha_1{}^3+3\alpha_1{}^2\alpha_2\right)\right\}+\frac{1}{\theta_0{}^2}\left\{\alpha_1\alpha_1'+\alpha_2'\alpha_1+\alpha_1'\alpha_2\right\}+\cdots$$

Il vient :

$$x_0 = 1 + \frac{\pi}{4\theta_0}(3 + 4n + 2m) \quad \lambda_n = x - \frac{3}{2} \rightarrow \lambda_n \ valeur\ propre\ de\ P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\vartheta_0)) = 0$$

$$x \approx x_0 + \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\theta_0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1}{x_0} + \frac{b_2}{x_0(1+x_0)} - \frac{a_1 b_1}{x_0^2} + \frac{1}{3x_0^3}\left(3a_1^2 b_1 - b_1^3\right) - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{x_0^2(1+x_0)} + \frac{b_3}{x_0(1+x_0)(2+x_0)} + \\ + \frac{a_1 b_1^3 - a_1^3 b_1}{x_0^4} + \frac{2a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2 - b_1^2 b_2}{x_0^3(1+x_0)} - \frac{a_2 b_2}{x_0^2(1+x_0)^2} - \frac{a_1 b_3 + a_3 b_1}{x_0^2(1+x_0)(2+x_0)} + \\ + \frac{b_4}{x_0(1+x_0)(2+x_0)(3+x_0)} \end{array} \right\} + \\ + \frac{1}{\theta_0^2}\left\{ \frac{3a_1 b_1^2}{x_0^4} - \frac{2b_1 b_2}{x_0^3(1+x_0)} - \frac{b_1}{x_0^3} - \frac{b_1 b_2}{x_0^2(1+x_0)^2} \right\} + \cdots \end{array} \right).$$

Valeurs des zéros des fonctions associées de Legendre pour m> 0

Si m est un nombre non entier positif, la formule est obtenue en remplaçant m par -m, de telles manière que les valeurs propres obtenues soient positives, il vient :

$$x_0 = 1 + \frac{\pi}{4\theta_0}(3 + 4n + 4s - 2m) \quad avec \quad s = \lfloor m \rfloor le\ plus\ grand\ entier\ inférieur\ à\ m$$

$$x \approx x_0 + \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\theta_0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1}{x_0} + \frac{b_2}{x_0(1+x_0)} - \frac{a_1 b_1}{x_0^2} + \frac{1}{3x_0^3}\left(3a_1^2 b_1 - b_1^3\right) - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{x_0^2(1+x_0)} + \frac{b_3}{x_0(1+x_0)(2+x_0)} + \\ + \frac{a_1 b_1^3 - a_1^3 b_1}{x_0^4} + \frac{2a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2 - b_1^2 b_2}{x_0^3(1+x_0)} - \frac{a_2 b_2}{x_0^2(1+x_0)^2} - \frac{a_1 b_3 + a_3 b_1}{x_0^2(1+x_0)(2+x_0)} + \\ + \frac{b_4}{x_0(1+x_0)(2+x_0)(3+x_0)} \end{array} \right\} + \\ + \frac{1}{\theta_0^2}\left\{ \frac{3a_1 b_1^2}{x_0^4} - \frac{2b_1 b_2}{x_0^3(1+x_0)} - \frac{b_1}{x_0^3} - \frac{b_1 b_2}{x_0^2(1+x_0)^2} \right\} + \cdots \end{array} \right)$$

$$\lambda_n = x - \frac{3}{2} \rightarrow \lambda_n \ valeur\ propre\ de\ P_{\lambda_n}^{m}(Cos(\vartheta_0)) = 0 \quad .$$

Si m est un nombre entier positif :

$$x_0 = 1 + \frac{\pi}{4\theta_0}(3 + 4n + 2m) \quad m \in \mathbf{N}$$

$$x \approx x_0 + \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\theta_0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1}{x_0} + \frac{b_2}{x_0(1+x_0)} - \frac{a_1 b_1}{x_0^2} + \frac{1}{3x_0^3}\left(3a_1^2 b_1 - b_1^3\right) - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{x_0^2(1+x_0)} + \frac{b_3}{x_0(1+x_0)(2+x_0)} + \\ + \frac{a_1 b_1^3 - a_1^3 b_1}{x_0^4} + \frac{2a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2 - b_1^2 b_2}{x_0^3(1+x_0)} - \frac{a_2 b_2}{x_0^2(1+x_0)^2} - \frac{a_1 b_3 + a_3 b_1}{x_0^2(1+x_0)(2+x_0)} + \\ + \frac{b_4}{x_0(1+x_0)(2+x_0)(3+x_0)} \end{array} \right\} + \\ + \frac{1}{\theta_0^2}\left\{ \frac{3a_1 b_1^2}{x_0^4} - \frac{2b_1 b_2}{x_0^3(1+x_0)} - \frac{b_1}{x_0^3} - \frac{b_1 b_2}{x_0^2(1+x_0)^2} \right\} + \cdots \end{array} \right)$$

$$\lambda_n \in \{0,1,2,\cdots,m-1\} \cup \left\{ x - \frac{3}{2} \quad \forall n \geq 0 \right\} \rightarrow \lambda_n \ valeur\ propre\ de\ P_{\lambda_n}^{m}(Cos(\vartheta_0)) = 0 \quad .$$

Exemple de calcul numérique, avec les racines des fonctions de Legendre de première espèce (m=0). Il vient :

$$b_1=\frac{1^2\,Sin(\beta)}{2^{2\times1}[2Sin(\theta_0)]}\quad b_2=\frac{1^2 3^2\,Sin(2\beta)}{2^{2\times2}2![2Sin(\theta_0)]^2}\quad b_3=\frac{1^2 3^2 5^2\,Sin(3\beta)}{2^{2\times3}3![2Sin(\theta_0)]^3}\quad b_4=\frac{1^2 3^2 5^2 7^2\,Sin(4\beta)}{2^{2\times4}4![2Sin(\theta_0)]^4}$$

$$a_1=\frac{Cos(\beta)}{2^{2\times1}[2Sin(\theta_0)]}\quad a_2=\frac{3^2\,Cos(2\beta)}{2^{2\times2}2![2Sin(\theta_0)]^2}\quad a_3=\frac{1^2 3^2 5^2\,Cos(3\beta)}{2^{2\times3}3![2Sin(\theta_0)]^3}\quad a_4=\frac{1^2 3^2 5^2 7^2\,Cos(4\beta)}{2^{2\times4}4![2Sin(\theta_0)]^4}$$

$$x_0=1+\frac{\pi}{4\theta_0}(3+4n)\quad \lambda_n=x-\frac{3}{2}\qquad \beta=\frac{\pi}{2}-\theta_0$$

$$x\approx x_0+\left(\begin{array}{l}\dfrac{1}{\theta_0}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{b_1}{x_0}+\dfrac{b_2}{x_0(1+x_0)}-\dfrac{a_1b_1}{x_0^{\,2}}+\dfrac{1}{3x_0^{\,3}}\left(3a_1^{\,2}b_1-b_1^{\,3}\right)-\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{x_0^{\,2}(1+x_0)}+\dfrac{b_3}{x_0(1+x_0)(2+x_0)}+\\+\dfrac{a_1b_1^{\,3}-a_1^{\,3}b_1}{x_0^{\,4}}+\dfrac{2a_1a_2b_1+a_1^{\,2}b_2-b_1^{\,2}b_2}{x_0^{\,3}(1+x_0)}-\dfrac{a_2b_2}{x_0^{\,2}(1+x_0)^2}-\dfrac{a_1b_3+a_3b_1}{x_0^{\,2}(1+x_0)(2+x_0)}+\\+\dfrac{b_4}{x_0(1+x_0)(2+x_0)(3+x_0)}\end{array}\right\}+\\+\dfrac{1}{\theta_0^{\,2}}\left\{\dfrac{3a_1b_1^{\,2}}{x_0^{\,4}}-\dfrac{2b_1b_2}{x_0^{\,3}(1+x_0)}-\dfrac{b_1}{x_0^{\,3}}-\dfrac{b_1b_2}{x_0^{\,2}(1+x_0)^2}\right\}+\cdots\end{array}\right)$$

Pour une valeur de ϑ₀=π/4, voici la simulation pour les 10 premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1 et 2):

Racine n◦ 1 = 2.5479 ≠0= 0.0478992 ≠1= -0.000898998 ≠2= -0.000290972
Racine n◦ 2 = 6.52221 ≠0= 0.0222103 ≠1= -0.0000834764 ≠2= -0.0000184569
Racine n◦ 3 = 10.5143 ≠0= 0.0143259 ≠1= -0.0000210041 ≠2= $-3.09537*10^{-6}$
Racine n◦ 4 = 14.5106 ≠0= 0.010553 ≠1= $-8.07055*10^{-6}$ ≠2= $-8.27674*10^{-7}$
Racine n◦ 5 = 18.5083 ≠0= 0.00834815 ≠1= $-3.89873*10^{-6}$ ≠2= $-2.91016*10^{-7}$
Racine n◦ 6 = 22.5069 ≠0= 0.00690368 ≠1= $-2.17028*10^{-6}$ ≠2= $-1.22498*10^{-7}$
Racine n◦ 7 = 26.5059 ≠0= 0.00588465 ≠1= $-1.32975*10^{-6}$ ≠2= $-5.85594*10^{-8}$
Racine n◦ 8 = 30.5051 ≠0= 0.00512743 ≠1= $-8.72995*10^{-7}$ ≠2= $-3.07741*10^{-8}$
Racine n◦ 9 = 34.5045 ≠0= 0.00454269 ≠1= $-6.03738*10^{-7}$ ≠2= $-1.74005*10^{-8}$
Racine n◦ 10 = 38.5041 ≠0= 0.00407757 ≠1= $-4.34819*10^{-7}$ ≠2= $-1.0429*10^{-8}$

Pour une valeur de ϑ₀=π/3, voici la simulation pour les 10 premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1 et 2):

Racine n◦ 1 = 1.77729 ≠0= 0.0272883 ≠1= -0.000237078 ≠2= -0.0000134362
Racine n◦ 2 = 4.76278 ≠0= 0.0127794 ≠1= -0.00002498 ≠2= $1.94608*10^{-6}$
Racine n◦ 3 = 7.75826 ≠0= 0.00825885 ≠1= $-7.04956*10^{-6}$ ≠2= $6.19713*10^{-7}$
Racine n◦ 4 = 10.7561 ≠0= 0.00608784 ≠1= $-2.92696*10^{-6}$ ≠2= $2.19138*10^{-7}$
Racine n◦ 5 = 13.7548 ≠0= 0.00481733 ≠1= $-1.48805*10^{-6}$ ≠2= $9.06012*10^{-8}$
Racine n◦ 6 = 16.754 ≠0= 0.00398444 ≠1= $-8.57495*10^{-7}$ ≠2= $4.24327*10^{-8}$
Racine n◦ 7 = 19.7534 ≠0= 0.00339663 ≠1= $-5.38288*10^{-7}$ ≠2= $2.18842*10^{-8}$
Racine n◦ 8 = 22.753 ≠0= 0.00295975 ≠1= $-3.59653*10^{-7}$ ≠2= $1.21731*10^{-8}$
Racine n◦ 9 = 25.7526 ≠0= 0.00262232 ≠1= $-2.52002*10^{-7}$ ≠2= $7.19397*10^{-9}$

Pour une valeur de $\vartheta_0=2\pi/3$, voici la simulation pour les 10 premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1 et 2):

Racine n◦ 1 = 0.601509 ≠0= -0.0234907 ≠1= -0.000378679 ≠2= -0.000157394
Racine n◦ 2 = 2.11286 ≠0= -0.0121369 ≠1= -0.0000629402 ≠2= -0.000023714
Racine n◦ 3 = 3.61694 ≠0= -0.00805657 ≠1= -0.0000194109 ≠2= -6.63981*10^{-6}
Racine n◦ 4 = 5.119 ≠0= -0.00600139 ≠1= -8.051*10^{-6} ≠2= -2.47032*10^{-6}
Racine n◦ 5 = 6.62023 ≠0= -0.00477308 ≠1= -3.99159*10^{-6} ≠2= -1.09126*10^{-6}
Racine n◦ 6 = 8.12104 ≠0= -0.00395893 ≠1= -2.23191*10^{-6} ≠2= -5.42464*10^{-7}
Racine n◦ 7 = 9.62162 ≠0= -0.00338065 ≠1= -1.36094*10^{-6} ≠2= -2.94224*10^{-7}
Racine n◦ 8 = 11.1221 ≠0= -0.00294909 ≠1= -8.85813*10^{-7} ≠2= -1.70708*10^{-7}
Racine n◦ 9 = 12.6224 ≠0= -0.00261487 ≠1= -6.06602*10^{-7} ≠2= -1.04521*10^{-7}

Exemple de calcul numérique, avec les racines des fonctions de Legendre de première espèce (m quelconque). Il vient :

$$b_1=\frac{(1^2-m^2)Sin(\beta)}{2^{2\times1}[2Sin(\theta_0)]}\quad b_2=\frac{(1^2-m^2)(3^2-m^2)Sin(2\beta)}{2^{2\times2}2![2Sin(\theta_0)]^2}\quad b_3=\frac{(1^2-m^2)(3^2-m^2)(5^2-m^2)Sin(3\beta)}{2^{2\times3}3![2Sin(\theta_0)]^3}$$

$$b_4=\frac{(1^2-m^2)(3^2-m^2)(5^2-m^2)(7^2-m^2)Sin(4\beta)}{2^{2\times4}4![2Sin(\theta_0)]^4}$$

$$a_1=\frac{(1^2-m^2)Cos(\beta)}{2^{2\times1}[2Sin(\theta_0)]}\quad a_2=\frac{(1^2-m^2)(3^2-m^2)Cos(2\beta)}{2^{2\times2}2![2Sin(\theta_0)]^2}\quad a_3=\frac{(1^2-m^2)(3^2-m^2)(5^2-m^2)Cos(3\beta)}{2^{2\times3}3![2Sin(\theta_0)]^3}$$

$$a_4=\frac{(1^2-m^2)(3^2-m^2)(5^2-m^2)(7^2-m^2)Cos(4\beta)}{2^{2\times4}4![2Sin(\theta_0)]^4}$$

$$\begin{cases} si\ m<0\ ou\ m>0\ et\ m\notin\mathbf{N}\rightarrow x_0=1+\dfrac{\pi}{4\theta_0}(3+4n+4s-2m) & s=0\ si\ m<0\quad s=\lfloor m\rfloor\ si\ m>0\ et\ m\notin\mathbf{N}\\ si\ m>0\ et\ m\in\mathbf{N}\rightarrow x_0=1+\dfrac{\pi}{4\theta_0}(3+4n+2m) & \lambda_n\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}\cup\left\{x-\dfrac{3}{2}\quad\forall n\geq0\right\}\end{cases}$$

$$\lambda_n=x-\frac{3}{2}\quad\beta=\frac{\pi}{2}-\theta_0$$

$$x\approx x_0+\left(\begin{array}{l}\dfrac{1}{\theta_0}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{b_1}{x_0}+\dfrac{b_2}{x_0(1+x_0)}-\dfrac{a_1b_1}{x_0^{\ 2}}+\dfrac{1}{3x_0^{\ 3}}\left(3a_1^{\ 2}b_1-b_1^{\ 3}\right)-\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{x_0^{\ 2}(1+x_0)}+\dfrac{b_3}{x_0(1+x_0)(2+x_0)}+\\+\dfrac{a_1b_1^{\ 3}-a_1^{\ 3}b_1}{x_0^{\ 4}}+\dfrac{2a_1a_2b_1+a_1^{\ 2}b_2-b_1^{\ 2}b_2}{x_0^{\ 3}(1+x_0)}-\dfrac{a_2b_2}{x_0^{\ 2}(1+x_0)^2}-\dfrac{a_1b_3+a_3b_1}{x_0^{\ 2}(1+x_0)(2+x_0)}+\\+\dfrac{b_4}{x_0(1+x_0)(2+x_0)(3+x_0)}\end{array}\right\}+\\+\dfrac{1}{\theta_0^{\ 2}}\left\{\dfrac{3a_1b_1^{\ 2}}{x_0^{\ 4}}-\dfrac{2b_1b_2}{x_0^{\ 3}(1+x_0)}-\dfrac{b_1}{x_0^{\ 3}}-\dfrac{b_1b_2}{x_0^{\ 2}(1+x_0)^2}\right\}+\cdots\end{array}\right)$$

Prenons par exemple m=1, et notons que la fonction associée de Legendre de première espèce d'ordre 1 est définie comme suit par une formule de Rodrigues :

$$P_\lambda^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^m P_\lambda(z)}{\partial z^m} \Rightarrow P_\lambda^m(z) = -\sqrt{1-z^2}\,\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial z}.$$

Donc les zéros de la dérivée première des fonctions de Legendre sont les zéros des fonctions associées de Legendre de première espèce d'ordre 1.

Pour une valeur de $\vartheta_0=\pi/4$, m=1 , voici la simulation pour les 10 premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1 et 2):

Racine n° 1 = 4.40533 ≠=0= -0.0946708 ≠=1= -0.0015862 ≠=2= -0.0000636312
Racine n◦ 2 = 8.44711 ≠=0= -0.0528874 ≠=1= -0.000293227 ≠=2= -1.92644*10^{-6}
Racine n◦ 3 = 12.4633 ≠=0= -0.0366712 ≠=1= -0.0000999829 ≠=2= -7.20891*10^{-8}
Racine n◦ 4 = 16.4719 ≠=0= -0.0280603 ≠=1= -0.0000452943 ≠=2= 2.86222*10^{-8}
Racine n◦ 5 = 20.4773 ≠=0= -0.0227226 ≠=1= -0.0000242023 ≠=2= 2.24911*10^{-8}
Racine n◦ 6 = 24.4809 ≠=0= -0.0190904 ≠=1= -0.0000144081 ≠=2= 1.346*10^{-8}
Racine n◦ 7 = 28.4835 ≠=0= -0.016459 ≠=1= -9.25733*10^{-6} ≠=2= 7.93428*10^{-9}
Racine n◦ 8 = 32.4855 ≠=0= -0.014465 ≠=1= -6.29512*10^{-6} ≠=2= 4.80415*10^{-9}
Racine n◦ 9 = 36.4871 ≠=0= -0.0129019 ≠=1= -4.47265*10^{-6} ≠=2= 3.01113*10^{-9}
Racine n◦ 10 = 40.4884 ≠=0= -0.0116436 ≠=1= -3.29065*10^{-6} ≠=2= 1.95232*10^{-9}

Pour une valeur de $\vartheta_0=\pi/3$, m=1, voici la simulation pour les 10 premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1 et 2):

Racine n◦ 1 = 3.19569 ≠=0= -0.0543088 ≠=1= -0.000778612 ≠=2= -0.000162786
Racine n◦ 2 = 6.21953 ≠=0= -0.0304708 ≠=1= -0.000139809 ≠=2= -0.0000157221
Racine n◦ 3 = 9.22885 ≠=0= -0.0211506 ≠=1= -0.0000466639 ≠=2= -3.32024*10^{-6}
Racine n◦ 4 = 12.2338 ≠=0= -0.0161909 ≠=1= -0.0000208572 ≠=2= -1.02612*10^{-6}
Racine n◦ 5 = 15.2369 ≠=0= -0.0131137 ≠=1= -0.0000110479 ≠=2= -3.98408*10^{-7}
Racine n◦ 6 = 18.239 ≠=0= -0.0110188 ≠=1= -6.53821*10^{-6} ≠=2= -1.80236*10^{-7}
Racine n◦ 7 = 21.2405 ≠=0= -0.00950065 ≠=1= -4.18338*10^{-6} ≠=2= -9.10053*10^{-8}
Racine n◦ 8 = 24.2416 ≠=0= -0.00835006 ≠=1= -2.83612*10^{-6} ≠=2= -4.99221*10^{-8}
Racine n◦ 9 = 27.2426 ≠=0= -0.00744797 ≠=1= -2.01045*10^{-6} ≠=2= -2.92197*10^{-8}
Racine n◦ 10 = 30.2433 ≠=0= -0.00672174 ≠=1= -1.47655*10^{-6} ≠=2= -1.80176*10^{-8}

Pour une valeur de $\vartheta_0=2\pi/3$, m=1, voici la simulation pour les 10 premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1 et 2):

Racine n◦ 1 = 1.42412 ≠=0= 0.0491233 ≠=1= -0.00100119 ≠=2= -0.000176662
Racine n◦ 2 = 2.90434 ≠=0= 0.0293405 ≠=1= -0.000216727 ≠=2= -0.0000145459
Racine n◦ 3 = 4.39574 ≠=0= 0.0207447 ≠=1= -0.0000780079 ≠=2= -1.5423*10^{-6}
Racine n◦ 4 = 5.891 ≠=0= 0.0160029 ≠=1= -0.0000364012 ≠=2= 2.96706*10^{-8}
Racine n◦ 5 = 7.38801 ≠=0= 0.0130121 ≠=1= -0.0000198364 ≠=2= 1.92877*10^{-7}
Racine n◦ 6 = 8.88596 ≠=0= 0.0109579 ≠=1= -0.0000119777 ≠=2= 1.59753*10^{-7}
Racine n◦ 7 = 10.3845 ≠=0= 0.00946138 ≠=1= -7.77875*10^{-6} ≠=2= 1.12605*10^{-7}
Racine n◦ 8 = 11.8833 ≠=0= 0.00832328 ≠=1= -5.33392*10^{-6} ≠=2= 7.70399*10^{-8}
Racine n◦ 9 = 13.3824 ≠=0= 0.00742891 ≠=1= -3.81486*10^{-6} ≠=2= 5.29038*10^{-8}
Racine n◦ 10 = 14.8817 ≠=0= 0.0067077 ≠=1= -2.82172*10^{-6} ≠=2= 3.68532*10^{-8}

On peut aussi développer en puissance de τ=1/x :

$$x = x_0 + \frac{1}{\theta_0} Arctan(U(x_0)) + \frac{Arctan(U(x_0))}{\theta_0^2} \frac{U'(x_0)}{1+(U(x_0))^2} +$$

$$+ \frac{Arctan(U(x_0))}{2\theta_0^3\left(1+(U(x_0))^2\right)^2}\left\{2(U'(x_0))^2[1-U(x_0)Arctan(U(x_0))] + U''(x_0)\left(1+(U(x_0))^2\right)Arctan(U(x_0))\right\}+\cdots$$

$$U'(x) = U'(\tau)\frac{d\tau}{dx} = -\frac{U'(\tau)}{x^2} = -\tau^2 U'(\tau) \quad U''(x) = \tau^2\left(\tau^2 U'(\tau)\right)' = \tau^4 U''(\tau) + 2\tau^3 U'(\tau)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{\theta_0} Arctan(U(\tau)) - \frac{Arctan(U(\tau))}{\theta_0^2}\frac{\tau^2 U'(\tau)}{1+(U(\tau))^2} +$$

$$+ \frac{Arctan(U(\tau))\tau^3}{2\theta_0^3\left(1+(U(\tau))^2\right)^2}\left\{2\tau(U'(\tau))^2[1-U(\tau)Arctan(U(\tau))] + (\tau U''(\tau)+2U'(\tau))\left(1+(U(\tau))^2\right)Arctan(U(\tau))\right\}+\cdots$$

$$U(x_0) = \frac{N(x_0)}{D(x_0)} \quad avec \quad \begin{cases} N(x) = \dfrac{b_1}{x} + \dfrac{b_2}{x(x+1)} + \cdots + \dfrac{b_p}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)} \\ D(x) = 1 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x(x+1)} + \cdots + \dfrac{a_p}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)} \end{cases}$$

$$Si \quad \tau = \frac{1}{x_0} \Rightarrow \begin{cases} N(\tau) \approx b_1\tau + \dfrac{b_2\tau^2}{1+\tau} + \dfrac{b_3\tau^3}{(1+\tau)(1+2\tau)} + \dfrac{b_4\tau^4}{(1+\tau)(1+2\tau)(1+3\tau)} + \cdots \\ D(\tau) \approx 1 + a_1\tau + \dfrac{a_2\tau^2}{1+\tau} + \dfrac{a_3\tau^3}{(1+\tau)(1+2\tau)} + \dfrac{a_4\tau^4}{(1+\tau)(1+2\tau)(1+3\tau)} + \cdots \end{cases}$$

Ce qui donne l'estimation suivante, à l'aide d'un petit calcul sur Mathematica en développant à l'ordre 4 en τ et l'ordre 2 en ϑ_0 :

$$x \approx x_0 + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\tau}{\theta_0}\left\{\begin{array}{l} b_1 + \tau(b_2 - a_1b_1) + \tau^2\left(a_1^2 b_1 - a_2b_1 - \dfrac{b_1^3}{3} - b_2 - a_1b_2 + b_3\right) + \\ \tau^3\left(a_1b_1^3 - a_1^3b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_1a_2b_1 - a_1b_3 - a_3b_1 + b_2 + a_1^2b_2 - a_2b_2 - b_1^2b_2 - 3b_3 + b_4\right) \end{array}\right\} + \\ + \dfrac{\tau^3}{\theta_0^2}\left\{-b_1^2 + 3\tau\left(a_1b_1^2 - b_1b_2\right)\right\} \end{array}\right]$$

A l'ordre 5 en τ et l'ordre 3 en ϑ_0 :, nous avons :

$$x \approx x_0 + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\tau}{\theta_0}\left\{\begin{array}{l} b_1 + \tau(b_2 - a_1b_1) + \tau^2\left(a_1^2 b_1 - a_2b_1 - \dfrac{b_1^3}{3} - b_2 - a_1b_2 + b_3\right) + \\ + \tau^3\left(a_1b_1^3 - a_1^3b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_1a_2b_1 - a_1b_3 - a_3b_1 + b_2 + a_1^2b_2 - a_2b_2 - b_1^2b_2 - 3b_3 + b_4\right) + \\ + \dfrac{\tau^4}{5}\left(\begin{array}{l} 5a_1^4b_1 - 5a_2b_1 - 5a_1b_2 + 10a_1a_2b_2 - 10a_1a_2b_1 + 10a_1a_3b_1 + 15a_1b_1^2b_2 - 15a_1^2a_2b_1 - 10a_1^2b_1^3 + \\ + b_1^5 - 5b_2 + 5a_2^2b_1 - 5a_1^2b_2 + 5a_2b_1^3 - 5a_1^3b_2 + 10a_2b_2 + 5b_1^2b_2 - 5b_1b_2^2 - 5a_4b_1 - 5a_1b_4 + \\ + 35b_3 + 15a_3b_1 + 15a_1b_3 + 5a_1^2b_3 - 5a_2b_3 - 5a_3b_2 - 5b_1^2b_3 - 30b_4 + 5b_5 \end{array}\right) \end{array}\right\} + \\ + \dfrac{\tau^3}{\theta_0^2}\left\{-b_1^2 + 3\tau\left(a_1b_1^2 - b_1b_2\right) + \dfrac{2}{3}\tau^2\left(-9a_1^2b_1^2 + 6a_2b_1^2 + 2b_1^4 + 6b_1b_2 + 12a_1b_1b_2 - 3b_2^2 - 6b_1b_3\right)\right\} + \dfrac{2b_1^3\tau^5}{\theta_0^3} \end{array}\right]$$

L'amélioration des résultats en passant aux ordres supérieurs est surtout manifeste lorsque m > 1.

Estimation des racines pour quelques valeurs limites de ϑ0 : ϑ0=π/2

Si ϑ0=π/2, on a déjà indiqué les valeurs propres du problème de Dirichlet (cas de la demi-sphère qui sont entières), on peut aussi raisonner à partir de la valeur des fonctions de Legendre associées en 0 qui est connu :

$$P_{\lambda_n}^{m}(0)=\frac{2^m}{\Gamma\left(\frac{\lambda_n-m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{-\lambda_n-m-1}{2}+1\right)} \quad \textit{sachant que } \Gamma(-n)=\infty \quad n\geq 0$$

Les racines sont les pôles de la fonction Gamma

$$\frac{\lambda_n-m}{2}+1=-k \quad ou \quad \frac{-\lambda_n-m-1}{2}+1=-k' \quad \forall k,k'\in \mathbf{N}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_n=m-2(k+1) \quad ou \quad \lambda_n=2(k'+1)-m-1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_n=m-2k \quad ou \quad \lambda_n=2k'-m-1 \quad \forall k,k'>0,k,k'\in \mathbf{N}$$

On retrouve donc pour m=0, les valeurs propres 1,3,5...

Estimation des racines pour quelques valeurs limites de ϑ0 : ϑ0 proche de zéro

Dans ce cas on doit utiliser un autre développement en série des fonctions associées de Legendre à l'aide des fonctions de Bessel :

$$P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\vartheta_0))=\frac{1}{\left(\lambda_n Cos\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\right)^m}\left\{\begin{array}{l} J_m(x)-Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)J_{m+1}(x)-Sin^2\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\left[\frac{1}{2}J_{m+2}(x)-\frac{x}{6}J_{m+3}(x)\right]+ \\ -Sin^3\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\left[\frac{2}{x}J_{m+2}(x)-\frac{3}{2}J_{m+3}(x)+\frac{x}{6}J_{m+4}(x)\right]+ \\ +Sin^4\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\left[\frac{x^2}{72}J_{m+6}(x)-\frac{17x}{60}J_{m+5}(x)+\frac{11}{8}J_{m+4}(x)-\frac{4}{3x}J_{m+3}(x)\right]+ \\ +O\left(Sin^5\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\right) \end{array}\right\}$$

$$avec\ x=2\lambda_n Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \qquad Posons\ t=Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\vartheta_0))=\frac{1}{\left(\lambda_n Cos\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\right)^m}\left\{\begin{array}{l} J_m(x)-tJ_{m+1}(x)-t^2\left[\frac{1}{2}J_{m+2}(x)-\frac{x}{6}J_{m+3}(x)\right]+ \\ -t^3\left[\frac{2}{x}J_{m+2}(x)-\frac{3}{2}J_{m+3}(x)+\frac{x}{6}J_{m+4}(x)\right]+ \\ +t^4\left[\frac{x^2}{72}J_{m+6}(x)-\frac{17x}{60}J_{m+5}(x)+\frac{11}{8}J_{m+4}(x)-\frac{4}{3x}J_{m+3}(x)\right]+ \\ +O(t^5) \end{array}\right\}$$

$$P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\vartheta_0))=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} J_m(x)-tJ_{m+1}(x)-t^2\left[J_{m+2}(x)-\frac{x}{6}J_{m+3}(x)\right]+ \\ -t^3\left[\frac{2}{x}J_{m+2}(x)-\frac{3}{2}J_{m+3}(x)+\frac{x}{6}J_{m+4}(x)\right]+ \\ +t^4\left[\frac{x^2}{72}J_{m+6}(x)-\frac{17x}{60}J_{m+5}(x)+\frac{11}{8}J_{m+4}(x)-\frac{4}{3x}J_{m+3}(x)\right]+O(t^5) \end{array}\right\}=0$$

La première approximation des racines de l'équation transcendantale est donc fournie par le premier terme du développement s'annulant, soit les racines de l'équation avec les fonctions de Bessel :

$$J_m\left(2\lambda_n Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\right)=0 \Rightarrow Pour \quad m=0 \Rightarrow J_0\left(2\lambda_n Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\right)=0$$

$$Soit\ x_0\ la\ n-ième\ racine\ de\ J_m(x_0)=0 \Rightarrow 2\lambda_n Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)=x_0 \Rightarrow \lambda_n \approx \frac{x_0}{2Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)}.$$

Pour améliorer ce résultat, on doit résoudre l'équation transcendantale suivante par approximation successive sur le développement en puissance de t :

$$t=Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \rightarrow On\ suppose \quad x \approx x_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+O(t^5)$$

$$x_0 \quad tq \quad J_m(x_0)=0 \quad J_m'(x_0)=-J_{m+1}(x_0) \quad J_{m+1}'(x_0)=-\frac{(m+1)}{x_0}J_{m+1}(x_0)$$

$$Développement\ à\ l'ordre\ 1\ de\ t$$

$$x \quad tq \quad J_m(x)-tJ_{m+1}(x)=0 \Leftrightarrow J_m(x)=tJ_{m+1}(x)$$

$$J_m(x) \approx J_m(x_0)+(x-x_0)J_m'(x_0) \approx (x-x_0)J_m'(x_0) \approx -(x-x_0)J_{m+1}(x_0)$$

$$J_{m+1}(x) \approx J_{m+1}(x_0)+(x-x_0)J_{m+1}'(x_0) \Rightarrow tJ_{m+1}(x)=tJ_{m+1}(x_0)+(x-x_0)tJ_{m+1}'(x_0)$$

$$(x-x_0)(J_m'(x_0)-tJ_{m+1}'(x_0))=tJ_{m+1}(x_0) \Leftrightarrow (x-x_0)(J_{m+1}(x_0)+tJ_{m+1}'(x_0))=-tJ_{m+1}(x_0)$$

$$(x-x_0) \approx -\frac{t}{\left(1-t\frac{(m+1)}{x_0}\right)} \approx -t \Rightarrow x \approx x_0-t.$$

A l'ordre 2 de t, on a besoin des relations suivantes en exprimant toutes les fonctions de Bessel en fonction $J_{m+1}(x)$:

$$J_m(x_0)=0 \quad J_m'(x_0)=-J_{m+1}(x_0) \quad J_m''(x_0)=\frac{J_{m+1}(x_0)}{x_0} \quad J_{m+1}'(x_0)=-\frac{(m+1)}{x_0}J_{m+1}(x_0)$$

$$J_{m+2}(x_0)=\frac{2(m+1)}{x_0}J_{m+1}(x_0) \quad J_{m+2}'(x_0)=\left\{1-\frac{2(m+1)(m+2)}{x_0^2}\right\}J_{m+1}(x_0)$$

$$J_{m+3}(x_0)=\left\{\frac{4(m+1)(m+2)}{x_0^2}-1\right\}J_{m+1}(x_0) \quad J_{m+3}'(x_0)=\left\{\frac{3m+5}{x_0}-\frac{4(m+1)(m+2)(m+3)}{x_0^3}\right\}J_{m+1}(x_0).$$

Et les calculs se développent comme suit :

Développement à l'ordre 2 de t

$$x \quad tq \quad J_m(x) - tJ_{m+1}(x) - t^2\left[\frac{1}{2}J_{m+2}(x) - \frac{x}{6}J_{m+3}(x)\right] = 0$$

$$J_m(x) \approx -(x-x_0)J_{m+1}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{J_{m+1}(x_0)}{x_0}$$

$$J_{m+1}(x) \approx J_{m+1}(x_0) + (x-x_0)J_{m+1}'(x_0)$$

$$J_{m+2}(x) \approx J_{m+2}(x_0) + (x-x_0)J_{m+2}'(x_0) \approx J_{m+1}(x_0)\left(\frac{2(m+1)}{x_0} + (x-x_0)\left\{1 - \frac{2(m+1)(m+2)}{x_0^{\ 2}}\right\}\right)$$

$$J_{m+3}(x) \approx J_{m+3}(x_0) + (x-x_0)J_{m+3}'(x_0) \approx J_{m+1}(x_0)\left(\left\{\frac{4(m+1)(m+2)}{x_0^{\ 2}} - 1\right\} + (x-x_0)\left\{\frac{3m+5}{x_0} - \frac{4(m+1)(m+2)(m+3)}{x_0^{\ 3}}\right\}\right)$$

$$\Rightarrow -(x-x_0)J_{m+1}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{J_{m+1}(x_0)}{x_0} - tJ_{m+1}(x_0)\left(1 - (x-x_0)\frac{(m+1)}{x_0}\right) -$$

$$-t^2\left[\begin{array}{l} J_{m+1}(x_0)\left(\frac{(m+1)}{x_0} + \frac{(x-x_0)}{2}\left\{1 - \frac{2(m+1)(m+2)}{x_0^{\ 2}}\right\}\right) - \\ -\frac{x}{6}J_{m+1}(x_0)\left(\left\{\frac{4(m+1)(m+2)}{x_0^{\ 2}} - 1\right\} + (x-x_0)\left\{\frac{3m+5}{x_0} - \frac{4(m+1)(m+2)(m+3)}{x_0^{\ 3}}\right\}\right) \end{array}\right] = 0$$

$$\Rightarrow (x-x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2x_0} + t\left(1 - (x-x_0)\frac{(m+1)}{x_0}\right) +$$

$$+t^2\left[\begin{array}{l} \left(\frac{(m+1)}{x_0} + \frac{(x-x_0)}{2}\left\{1 - \frac{2(m+1)(m+2)}{x_0^{\ 2}}\right\}\right) - \\ -\frac{(x-x_0)}{6}\left(\left\{\frac{4(m+1)(m+2)}{x_0^{\ 2}} - 1\right\} + (x-x_0)\left\{\frac{3m+5}{x_0} - \frac{4(m+1)(m+2)(m+3)}{x_0^{\ 3}}\right\}\right) - \\ -\frac{x_0}{6}\left(\left\{\frac{4(m+1)(m+2)}{x_0^{\ 2}} - 1\right\} + (x-x_0)\left\{\frac{3m+5}{x_0} - \frac{4(m+1)(m+2)(m+3)}{x_0^{\ 3}}\right\}\right) \end{array}\right] = 0$$

$$\text{à l'ordre 2 de } t \rightarrow \begin{cases} t(x-x_0) \approx -t^2 + O(t^3) \\ t^2(x-x_0) \approx O(t^3) \\ (x-x_0)^2 \approx t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0) + t + t^2\left[\frac{2(m+1)}{x_0} - \frac{1}{2x_0} - \frac{x_0}{6}\left(\left\{\frac{4(m+1)(m+2)}{x_0^{\ 2}} - 1\right\}\right)\right] = 0$$

$$x \approx x_0 - t - t^2\left[\frac{2(m+1)}{x_0} - \frac{2(m+1)(m+2)}{3x_0} - \frac{1}{2x_0} + \frac{x_0}{6}\right]$$

$$x \approx x_0 - t - t^2\left[\frac{4(m+1)(1-m)}{6x_0} - \frac{3}{6x_0} + \frac{x_0}{6}\right] \approx x_0 - t - t^2\,\frac{x_0}{6}\left[1 + \frac{4(1-m^2) - 3}{x_0^{\ 2}}\right]$$

$$\Rightarrow x \approx x_0 - t - t^2\,\frac{x_0}{6}\left[1 + \frac{(1-4m^2)}{x_0^{\ 2}}\right]$$

On donne ici le résultat lorsque l'on porte le développement jusqu'au 4ème ordre en t :

$$x \approx x_0 - t - t^2 \frac{x_0}{6}\left[1 + \frac{(1-4m^2)}{x_0^{\ 2}}\right] +$$
$$+ t^4 \left\{ \frac{-17x_0}{360} + \frac{592m^2 + 40m - 13}{180x_0} + \frac{48m^4 + 6480m^2 + 28400m + 7720}{360x_0^{\ 3}} \right\}$$
$$avec \begin{cases} x_0 \text{ nième zéro de la fonction de Bessel } J_m(x_0) = 0 \\ t = Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \quad \lambda_n = \frac{x}{2t} \quad \text{valeur approchée de } P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\vartheta_0)) = 0 \end{cases}$$

Pour les racines des ordres m> 0 des fonctions associées de Legendre, nous avons :

$$Si\ m \in \mathbf{N} \Rightarrow \begin{cases} x \approx x_0 - t - t^2 \frac{x_0}{6}\left[1 + \frac{(1-4m^2)}{x_0^{\ 2}}\right] + \\ + t^4 \left\{ \frac{-17x_0}{360} + \frac{592m^2 + 40m - 13}{180x_0} + \frac{48m^4 + 6480m^2 + 28400m + 7720}{360x_0^{\ 3}} \right\} \\ avec \begin{cases} x_0 \text{ nième zéro de la fonction de Bessel } J_m(x_0) = 0 \\ t = Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \quad \lambda_n = \frac{x}{2t} \quad \text{valeur approchée de } P_{\lambda_n}^{m}(Cos(\vartheta_0)) = 0 \end{cases} \\ \lambda_n \in \{0,1,2,\cdots,m-1\} \cup \left\{\frac{x}{2t}\right\} \end{cases}$$

$$Si\ m \notin \mathbf{N} \Rightarrow \begin{cases} x \approx x_0 - t - t^2 \frac{x_0}{6}\left[1 + \frac{(1-4m^2)}{x_0^{\ 2}}\right] + \\ + t^4 \left\{ \frac{-17x_0}{360} + \frac{592m^2 - 40m - 13}{180x_0} + \frac{48m^4 + 6480m^2 - 28400m + 7720}{360x_0^{\ 3}} \right\} \\ avec \begin{cases} x_0 \text{ nième zéro de la fonction de Bessel } J_{-m}(x_0) = 0 \\ t = Sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \quad \lambda_n = \frac{x}{2t} \quad \text{valeur approchée de } P_{\lambda_n}^{m}(Cos(\vartheta_0)) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Pour une valeur de $\vartheta_0=\pi/12$, m=0, voici la simulation pour les premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1,2 et 4):

Racine n◦ 1 = 8.68121 !=0= -0.530836 !=1= -0.0308359 !=2= -0.000155068 !=4= -0.00170987
Racine n◦ 2 = 20.5832 !=0= -0.56232 !=1= -0.06232 !=2= -0.000306622 !=4= -0.000143993
Racine n◦ 3 = 32.5535 !=0= -0.595853 !=1= -0.0958528 !=2= -0.000467658 !=4= -0.0000407981
Racine n◦ 4 = 44.5394 !=0= -0.629813 !=1= -0.129813 !=2= -0.00063145 !=4= -0.0000200562
Racine n◦ 5 = 56.5312 !=0= -0.663931 !=1= -0.163931 !=2= -0.000796323 !=4= -0.0000141443
Racine n◦ 6 = 68.5258 !=0= -0.698126 !=1= -0.198126 !=2= -0.000961724 !=4= -0.0000124806
Racine n◦ 7 = 80.522 !=0= -0.732363 !=1= -0.232363 !=2= -0.00112742 !=4= -0.0000123957
Racine n◦ 8 = 92.5191 !=0= -0.766626 !=1= -0.266626 !=2= -0.0012933 !=4= -0.0000130053
Racine n◦ 9 = 104.517 !=0= -0.800907 !=1= -0.300907 !=2= -0.00145931 !=4= -0.0000139588
Racine n◦ 10 = 116.515 !=0= -0.835199 !=1= -0.335199 !=2= -0.00162539 !=4= -0.0000150983

Pour une valeur de $\vartheta_0=\pi/12$, m=1, voici la simulation pour les premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1,2 et 4):

Racine n◦ 1 = 14.1446 !=0= -0.533304 !=1= -0.0333039 !=2= -0.000141903 !=4= -0.0000326839
Racine n◦ 2 = 26.3023 !=0= -0.571996 !=1= -0.0719958 !=2= -0.000337279 !=4= -0.000316919
Racine n◦ 3 = 38.363 !=0= -0.607966 !=1= -0.107966 !=2= -0.000515063 !=4= -0.000266655
Racine n◦ 4 = 50.3952 !=0= -0.643163 !=1= -0.143163 !=2= -0.000687524 !=4= -0.000219363
Racine n◦ 5 = 62.4152 !=0= -0.678031 !=1= -0.178031 !=2= -0.000857689 !=4= -0.000185246
Racine n◦ 6 = 74.4287 !=0= -0.712728 !=1= -0.212728 !=2= -0.00102666 !=4= -0.000160648
Racine n◦ 7 = 86.4386 !=0= -0.747327 !=1= -0.247327 !=2= -0.00119492 !=4= -0.000142456
Racine n◦ 8 = 98.446 !=0= -0.781862 !=1= -0.281862 !=2= -0.00136273 !=4= -0.000128653
Racine n◦ 9 = 110.452 !=0= -0.816354 !=1= -0.316354 !=2= -0.00153025 !=4= -0.000117953
Racine n◦ 10 = 122.457 !=0= -0.850817 !=1= -0.350817 !=2= -0.00169754 !=4= -0.000109514

Pour une valeur de $\vartheta_0=\pi/12$, m=4, voici la simulation pour les premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1,2 et 4):

Racine n◦ 1 = 28.5764 !=0= -0.491888 !=1= 0.00811154 !=2= 0.000346688 !=4= -0.0068959
Racine n◦ 2 = 41.8265 !=0= -0.55852 !=1= -0.0585201 !=2= -0.0000994765 !=4= -0.00473294
Racine n◦ 3 = 54.4471 !=0= -0.609048 !=1= -0.109048 !=2= -0.000394145 !=4= -0.00364662
Racine n◦ 4 = 66.8272 !=0= -0.653349 !=1= -0.153349 !=2= -0.000636513 !=4= -0.00297804
Racine n◦ 5 = 79.0862 !=0= -0.694489 !=1= -0.194489 !=2= -0.000853748 !=4= -0.0025217
Racine n◦ 6 = 91.2746 !=0= -0.733786 !=1= -0.233786 !=2= -0.00105676 !=4= -0.00218937
Racine n◦ 7 = 103.418 !=0= -0.771906 !=1= -0.271906 !=2= -0.00125086 !=4= -0.00193619
Racine n◦ 8 = 115.531 !=0= -0.809227 !=1= -0.309227 !=2= -0.001439 !=4= -0.00173678
Racine n◦ 9 = 127.623 !=0= -0.84598 !=1= -0.34598 !=2= -0.00162292 !=4= -0.00157562
Racine n◦ 10 = 139.699 !=0= -0.882313 !=1= -0.382313 !=2= -0.00180377 !=4= -0.00144269

<u>Estimation des racines pour quelques valeurs limites de ϑ0 : ϑ0 proche de π</u>

Pour cela on utilise maintenant le développement hypergéométrique suivant, dans lequel on suppose m non entier :

$$Posons\ \beta = \pi - \vartheta_0$$

$$P_{\lambda_n}^{m}(Cos(\vartheta_0)) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\Gamma(-m)}{\Gamma(\lambda_n - m + 1)\Gamma(-\lambda_n - m)} Tan^{m}\left(\dfrac{\beta}{2}\right) F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 + m; Sin^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\right) - \\ - \dfrac{Sin(\lambda_n \pi)\Gamma(m)}{\pi} Cotan^{m}\left(\dfrac{\beta}{2}\right) F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 - m; Sin^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\right) \end{array} \right\}.$$

Cas m<0, et m non entier :

Dans ce cas la première expression du membre droit :

$$Tan^{-m}\left(\frac{\beta}{2}\right) \to 0 \Rightarrow Tan^{m}\left(\frac{\beta}{2}\right) \to \infty \quad \frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(\lambda_n - m + 1)\Gamma(-\lambda_n - m)} Tan^{m}\left(\frac{\beta}{2}\right) F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 + m; Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \to \infty$$

devient infinie, il faut annuler cette expression pour trouver en première approximation les racines de l'équation transcendantale. Elles correspondent aux pôles des fonctions Gamma du dénominateur en première approximation, soit :

$$\Gamma(\lambda_n - m + 1) = \infty \Rightarrow \lambda_n - m + 1 = -k \Leftrightarrow \lambda_n = m - k - 1 \quad k \in \mathbf{N}$$

$$\Gamma(-\lambda_n - m) = \infty \Rightarrow -\lambda_n - m = -k \Leftrightarrow \lambda_n = k - m \quad k \in \mathbf{N}.$$

Pour obtenir une approximation de degré supérieur, on annule le membre droit de l'égalité, soit :

$$\frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(\lambda_n - m + 1)\Gamma(-\lambda_n - m)} Tan^{m}\left(\frac{\beta}{2}\right) F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 + m; Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{Sin(\lambda_n \pi)\Gamma(m)}{\pi} Cotan^{m}\left(\frac{\beta}{2}\right) F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 - m; Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right).$$

Et selon L.Robin, par commodité d'écriture changeons m en -m, soit à rechercher les solutions pour m>0, cette fois-ci :

$$\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\lambda_n + m + 1)\Gamma(m - \lambda_n)} Tan^{-m}\left(\frac{\beta}{2}\right) F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 - m; Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{Sin(\lambda_n \pi)\Gamma(-m)}{\pi} Cotan^{-m}\left(\frac{\beta}{2}\right) F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 + m; Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{Sin(\lambda_n \pi)} = Tan^{2m}\left(\frac{\beta}{2}\right) \frac{\Gamma(-m)\Gamma(\lambda_n + m + 1)\Gamma(m - \lambda_n)}{\pi\ \Gamma(m)} \frac{F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 + m; Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}{F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 - m; Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}$$

$$Comme \quad \frac{1}{\Gamma(m - \lambda_n)} = \frac{\Gamma(\lambda_n - m + 1)}{\pi} Sin((m - \lambda_n)\pi) \qquad \Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{Sin(z\pi)}$$

$$\Leftrightarrow Tan((m - \lambda_n)\pi) = Tan^{2m}\left(\frac{\beta}{2}\right) \frac{\Gamma(-m)\Gamma(\lambda_n + m + 1)}{\Gamma(m)\Gamma(\lambda_n - m + 1)} \frac{Sin(\lambda_n \pi)}{Cos((m - \lambda_n)\pi)} \frac{F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 + m; Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}{F\left(-\lambda_n, \lambda_n + 1; 1 - m; Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}$$

m est ici positif, l'angle β, complément de θ_0 à π, est très petit, donc la tangente Tan(β/2) peut être remplacée par β/2, les deux séries hypergéométriques tendent toutes deux vers 1, et le membre droit de l'équation peut être confondu avec sa tangente, il vient :

$$Tan((m-\lambda_n)\pi) \approx \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \frac{\Gamma(-m)\Gamma(\lambda_n+m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(\lambda_n-m+1)} \frac{Sin(\lambda_n\pi)}{Cos((m-\lambda_n)\pi)}$$

$$\Rightarrow Tan((m-\lambda_n)\pi) \approx Tan\left(\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \frac{\Gamma(-m)\Gamma(\lambda_n+m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(\lambda_n-m+1)} \frac{Sin(\lambda_n\pi)}{Cos((m-\lambda_n)\pi)}\right)$$

$$\Rightarrow (m-\lambda_n)\pi \approx -k\pi + \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \frac{\Gamma(-m)\Gamma(\lambda_n+m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(\lambda_n-m+1)} \frac{Sin(\lambda_n\pi)}{Cos((m-\lambda_n)\pi)}$$

$$\Rightarrow (\lambda_n-m)\pi \approx k\pi - \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \frac{\Gamma(-m)\Gamma(\lambda_n+m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(\lambda_n-m+1)} \frac{Sin(\lambda_n\pi)}{Cos((m-\lambda_n)\pi)}$$

En itérant une fois cette équation on trouve le premier ordre d'approximation des racines λ_n :

$$\lambda_n^0 = (k+m) \qquad (\lambda_n^1 - m)\pi \approx k\pi - \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \frac{\Gamma(-m)\Gamma(\lambda_n^0+m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(\lambda_n^0-m+1)} \frac{Sin(\lambda_n^0\pi)}{Cos((m-\lambda_n^0)\pi)}$$

$$\approx k\pi - \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \frac{\Gamma(-m)\Gamma(k+2m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(k+1)} \frac{Sin((k+m)\pi)}{Cos(k\pi)}$$

$$\approx k\pi - \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \frac{\Gamma(-m)\Gamma(k+2m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(k+1)} Sin(m\pi) \quad Or \quad \Gamma(-m)\Gamma(1+m) = -\frac{\pi}{Sin(m\pi)}$$

$$\approx k\pi + \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \pi \frac{\Gamma(k+2m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(1+m)\Gamma(k+1)}$$

$$\Rightarrow \lambda_n^1 - m \approx k + \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \frac{\Gamma(k+2m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(1+m)\Gamma(k+1)} \Rightarrow \lambda_n^1 \approx k + m + \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \frac{\Gamma(k+2m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(m+1)\Gamma(k+1)}$$

$$Solution\ en\ deuxième\ approximation\ de \quad P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\vartheta_0)) = 0 \quad avec \quad m > 0$$

On note avec ce résultat que l'approximation est moins avec les valeurs k plus grande., soit les racines successives croissantes.

Cas m > 0, m entier

Lorsque m est un entier, il existe une formule qui relie les deux fonctions de Legendre associées d'ordre opposé :

$$P_{\lambda_n}^{m}(Cos(\vartheta_0)) = (-1)^m \frac{\Gamma(\lambda_n+m+1)}{\Gamma(\lambda_n-m+1)} P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\vartheta_0))$$

$$\lambda_n \quad mêmes\ racines\ que \quad P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\vartheta_0))$$

$$+\ racines\ \Gamma(\lambda_n-m+1) = \infty \Rightarrow \lambda_n - m + 1 = -k \Rightarrow \lambda_n = m-k-1 \Rightarrow \lambda_n \le m-1$$

$$De\ plus \quad \Gamma(\lambda_n+m+1) \ne \infty \Rightarrow \lambda_n + m + 1 \ne -k' \Rightarrow \lambda_n \ne -k' - m - 1 \Rightarrow \lambda_n > -m-1 \Rightarrow \lambda_n \ge -m$$

$$\Rightarrow \lambda_n \in \{-m, -m+1, \cdots, m-1\} \quad 2m \quad valeurs$$

$$\lambda_n\ restreint\ aux\ valeurs\ positives$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = \pi - \vartheta_0 \\ \lambda_n \in \{0,1,2,\cdots,m-1\} \cup \left\{ k + m + \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m} \frac{\Gamma(k+2m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(m+1)\Gamma(k+1)} \middle/ k \ge 0 \right\} \end{cases}$$

Cas m > 0, m non entier

Lorsque m n'est pas entier alors c'est le second terme du membre droit de l'expression de départ qui devient infini, et qu'il convient d'annuler, soit :

$$Tan^{m}\left(\frac{\beta}{2}\right)\to 0 \Rightarrow Tan^{-m}\left(\frac{\beta}{2}\right)\to\infty$$

$$\frac{Sin(\lambda_n\pi)\Gamma(m)}{\pi}Cotan^{m}\left(\frac{\beta}{2}\right)F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1-m;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\to\infty \Rightarrow Sin(\lambda_n\pi)=0$$

En première approximation on a donc bien les valeurs $\lambda_n=k$ entier quelconque. Pour obtenir une approximation de degré supérieur, on annule une fois de plus l'expression du développement de la la fonction de Legendre en fonction de la tangente , comme suit :

$$\frac{Sin(\lambda_n\pi)\Gamma(m)}{\pi}=\frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(\lambda_n-m+1)\Gamma(-\lambda_n-m)}Tan^{2m}\left(\frac{\beta}{2}\right)\frac{F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1+m;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}{F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1-m;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Sin(\lambda_n\pi)}{Cos(\lambda_n\pi)}=\frac{\pi\,\Gamma(-m)}{\Gamma(\lambda_n-m+1)\Gamma(-\lambda_n-m)\Gamma(m)Cos(\lambda_n\pi)}Tan^{2m}\left(\frac{\beta}{2}\right)\frac{F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1+m;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}{F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1-m;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow Tan(\lambda_n\pi)=\frac{\pi\,\Gamma(-m)}{\Gamma(\lambda_n-m+1)\Gamma(-\lambda_n-m)\Gamma(m)Cos(\lambda_n\pi)}Tan^{2m}\left(\frac{\beta}{2}\right)\frac{F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1+m;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}{F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1-m;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}.$$

En réalisant les mêmes approximations qu'avec le calcul m<0, soit l'angle β, complément de ϑ_0 à π, est très petit, sa tangente Tan(β/2) peut être remplacée par β/2, les deux séries hypergéométriques tendent toutes deux vers 1, et le membre droit de l'équation peut être confondu avec sa tangente, il vient :

$$\frac{Sin(\lambda_n\pi)}{Cos(\lambda_n\pi)}=\frac{\pi\,\Gamma(-m)}{\Gamma(\lambda_n-m+1)\Gamma(-\lambda_n-m)\Gamma(m)Cos(\lambda_n\pi)}Tan^{2m}\left(\frac{\beta}{2}\right)\frac{F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1+m;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}{F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1-m;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_n\pi-k\pi=\frac{\pi\,\Gamma(-m)}{\Gamma(\lambda_n-m+1)\Gamma(-\lambda_n-m)\Gamma(m)Cos(\lambda_n\pi)}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_n=k+\frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(\lambda_n-m+1)\Gamma(-\lambda_n-m)\Gamma(m)Cos(\lambda_n\pi)}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m}$$

$$\lambda_n^0=k,\quad \lambda_n^1\approx k+\frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(\lambda_n^0-m+1)\Gamma(-\lambda_n^0-m)\Gamma(m)Cos(\lambda_n^0\pi)}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m}\approx k+(-1)^k\frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(k-m+1)\Gamma(-k-m)\Gamma(m)}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m}$$

$$\Rightarrow \lambda_n\approx k+(-1)^k\frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(k-m+1)\Gamma(-k-m)\Gamma(m)}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m}$$

$$Comme\quad \frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(-k-m)}=(-1)^k\frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(m+1)}\Rightarrow \lambda_n\approx k+\frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(k-m+1)\Gamma(m)\Gamma(m+1)}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2m}$$

On trouve donc finalement pour m> 0 :

$$\lambda_n \approx k + \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m)\Gamma(k-m+1)}\left(\frac{\pi-\vartheta_0}{2}\right)^{2m} \qquad k \in \mathbf{N}$$

.

Pour m=0 (soit le cas de la fonction de Legendre de première espèce, on applique un développement donné dans l'ouvrage de Louis Robin :

$$Tan(\lambda_n \pi) = \frac{\pi}{2}\frac{F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}{\left\{\begin{array}{l}\left[Log\left(Cotan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)-\psi(\lambda_n)\right]F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)+ \\ +\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{\Gamma(\lambda_n+p+1)\psi(p)}{\Gamma(\lambda_n-p+1)(p!)^2}(-1)^p\left(Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)^p\end{array}\right\}}$$

$$Ici \quad F\left(-\lambda_n,\lambda_n+1;1;Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\approx 1 \quad \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{\Gamma(\lambda_n+p+1)\psi(p)}{\Gamma(\lambda_n-p+1)(p!)^2}(-1)^p\left(Sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)^p \approx 0 \quad \psi(\lambda_n)\approx 0 \quad si \quad \lambda_n \approx k > 0$$

$$\Rightarrow Tan(\lambda_n\pi) \approx \frac{\pi}{2}\frac{1}{\left\{\left[Log\left(Cotan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)-\psi(\lambda_n)\right]\right\}} \approx \frac{\pi}{2}\frac{1}{Log\left(Cotan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)} \quad Cotan\left(\frac{\beta}{2}\right)\approx\frac{2}{\beta}$$

$$\Rightarrow \lambda_n\pi \approx k\pi + \frac{\pi}{2}\frac{1}{Log\left(Cotan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)} \approx k\pi + \frac{\pi}{2}\frac{1}{Log\left(\frac{2}{\beta}\right)}$$

$$\Rightarrow \lambda_n \approx k + \frac{1}{2Log\left(\frac{2}{\beta}\right)}$$

Soit finalement en deuxième approximation :

$$\lambda_n \approx k - \frac{1}{2Log\left(\frac{\pi-\vartheta_0}{2}\right)} = k + \frac{1}{2Log\left(\frac{2}{\pi-\vartheta_0}\right)}$$

.

Illustrons par quelques valeurs numériques.

Pour une valeur de ϑ_0=17π/18, m=-1.6, voici la simulation pour les premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1) et l'écart Δ1 entre ces deux approximations:

Racine n◦ 1 = 1.60235 !=0= 0.0023511 !=1= -0.000126691 Δ1= 0.00247779
Racine n◦ 2 = 2.60919 !=0= 0.00919252 !=1= -0.00121419 Δ1= 0.0104067
Racine n◦ 3 = 3.62181 !=0= 0.0218134 !=1= -0.00524399 Δ1= 0.0270574
Racine n◦ 4 = 4.64058 !=0= 0.0405753 !=1= -0.0153434 Δ1= 0.0559187
Racine n◦ 5 = 5.66517 !=0= 0.0651684 !=1= -0.0354852 Δ1= 0.100654
Racine n◦ 6 = 6.69494 !=0= 0.0949355 !=1= -0.0701365 Δ1= 0.165072
Racine n◦ 7 = 7.72911 !=0= 0.129114 !=1= -0.123996 Δ1= 0.25311
Racine n◦ 8 = 8.76697 !=0= 0.166974 !=1= -0.201844 Δ1= 0.368818
Racine n◦ 9 = 9.80787 !=0= 0.207875 !=1= -0.30847 Δ1= 0.516345
Racine n◦ 10 = 10.8513 !=0= 0.251279 !=1= -0.448656 Δ1= 0.699935

Pour une valeur de ϑ_0=17π/18, m=1 ou -1, voici la simulation pour les premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1) et l'écart $\Delta 1$ entre ces deux approximations:

Racine n◦ 1 = 1.01453 !=0= 0.0145328 !=1= -0.000698044 Δ1= 0.0152309
Racine n◦ 2 = 2.04054 !=0= 0.0405352 !=1= -0.00515741 Δ1= 0.0456926
Racine n◦ 3 = 3.07482 !=0= 0.0748162 !=1= -0.016569 Δ1= 0.0913852
Racine n◦ 4 = 4.11495 !=0= 0.114946 !=1= -0.037363 Δ1= 0.152309
Racine n◦ 5 = 5.15923 !=0= 0.159231 !=1= -0.0692324 Δ1= 0.228463
Racine n◦ 6 = 6.20652 !=0= 0.206517 !=1= -0.113331 Δ1= 0.319848
Racine n◦ 7 = 7.25601 !=0= 0.256014 !=1= -0.17045 Δ1= 0.426464
Racine n◦ 8 = 8.30717 !=0= 0.307173 !=1= -0.241138 Δ1= 0.548311
Racine n◦ 9 = 9.3596 !=0= 0.359605 !=1= -0.325785 Δ1= 0.685389

Pour une valeur de ϑ_0=17π/18, m=1.6, voici la simulation pour les premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1) et l'écart $\Delta 1$ entre ces deux approximations:

Racine n◦ 1 = 1.00052 !=0= 0.000523983 !=1= -0.000011308 Δ1= 0.000535291
Racine n◦ 2 = 2.00445 !=0= 0.0044545 !=1= -0.000363125 Δ1= 0.00481762
Racine n◦ 3 = 3.01351 !=0= 0.0135082 !=1= -0.00232112 Δ1= 0.0158293
Racine n◦ 4 = 4.02859 !=0= 0.0285873 !=1= -0.00834785 Δ1= 0.0369351
Racine n◦ 5 = 5.04974 !=0= 0.049745 !=1= -0.0219526 Δ1= 0.0716975
Racine n◦ 6 = 6.0765 !=0= 0.0764966 !=1= -0.0473446 Δ1= 0.123841
Racine n◦ 7 = 7.10812 !=0= 0.10812 !=1= -0.0891085 Δ1= 0.197229
Racine n◦ 8 = 8.14385 !=0= 0.143855 !=1= -0.151988 Δ1= 0.295843
Racine n◦ 9 = 9.183 !=0= 0.183002 !=1= -0.240773 Δ1= 0.423775
Racine n◦ 10 = 10.225 !=0= 0.224963 !=1= -0.36025 Δ1= 0.585213

Pour une valeur de ϑ_0=27π/28, m=0, voici la simulation pour les premières racines de l'équation transcendantale, avec les différences par approximation d'ordre successivement supérieur (0,1) et l'écart $\Delta 1$ entre ces deux approximations:

Racine n◦ 1 = 0.171513 !=0= 0.171513 !=1= -0.00206017 Δ1= 0.173574
Racine n◦ 2 = 1.23469 !=0= 0.234693 !=1= 0.0611191 Δ1= 0.173574
Racine n◦ 3 = 2.28625 !=0= 0.286247 !=1= 0.112673 Δ1= 0.173574
Racine n◦ 4 = 3.33301 !=0= 0.333006 !=1= 0.159432 Δ1= 0.173574
Racine n◦ 5 = 4.37715 !=0= 0.377147 !=1= 0.203574 Δ1= 0.173574
Racine n◦ 6 = 5.41965 !=0= 0.419653 !=1= 0.24608 Δ1= 0.173574
Racine n◦ 7 = 6.46105 !=0= 0.461051 !=1= 0.287477 Δ1= 0.173574
Racine n◦ 8 = 7.50165 !=0= 0.501655 !=1= 0.328081 Δ1= 0.173574
Racine n◦ 9 = 8.54167 !=0= 0.541668 !=1= 0.368094 Δ1= 0.173574
Racine n◦ 10 = 9.58123 !=0= 0.581227 !=1= 0.407654 Δ1= 0.173574

Valeurs propres du problème de Neumann sur le cône sphérique pour des valeurs moyennes de l'angle d'ouverture π/6≤ϑ0 ≤5π/6

Selon la méthode employée dans l'article de MacDonald, ce sont deux articles quasiment introuvable du mathématicien indien Bolanath Pal, parus en 1919-1920 dont voici les références, « « On the Numerical Calculation of the Roots of the Equations $P_n^m(\mu)=0$ *and* $\frac{d}{d\mu}P_n^m(\mu)=0$ *regarded as Equations in n. [Part I, Part II] », Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 1919-1920. Les deux articles donnent la solution approchée des racines des dérivées premières des fonctions de Legendre associées . Pour établir une valeur approchée des racines, les articles tirent partie d'une formule reliant les dérivées des fonctions associées de Legendre*

$$\mu_0 = Cos(\theta_0) \to \left(\mu_0^{\ 2}-1\right)\frac{d}{d\mu}P_{\lambda_n}^{-m}(\mu_0) = \lambda_n\mu_0 P_{\lambda_n}^{-m}(\mu_0) - \left(\lambda_n - m\right)P_{\lambda_n-1}^{-m}(\mu_0)$$

Ici nous choisissirons de développer sur des ordres négatifs à l'instar de l'article MacDonald.En utilisant la formule donnée précédemment pour le développement des fonctions associées

$$P_{\lambda_n}^{-m}(Cos(\theta_0)) = \frac{(\lambda_n - m)\Gamma(\lambda_n - m)}{\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\begin{array}{l} Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\theta_0 - m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+ \\ +\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)\times \\ \times Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{2p+1}{2}\right)\theta_0 - m\frac{\pi}{2}-(2p+1)\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right\}}{2^{2p}\,p!\left(2\lambda_n+3\right)\left(2\lambda_n+5\right)\cdots\left(2\lambda_n+2p+1\right)Sin^p\left(\theta_0\right)}\end{array}\right\}$$

$$P_{\lambda_n-1}^{-m}(Cos(\theta_0)) = \frac{\Gamma(\lambda_n - m)}{\Gamma\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\begin{array}{l} Cos\left(\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0 - m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+ \\ +\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)\times \\ \times Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{2p-1}{2}\right)\theta_0 - m\frac{\pi}{2}-(2p+1)\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right\}}{2^{2p}\,p!\left(2\lambda_n+1\right)\left(2\lambda_n+3\right)\cdots\left(2\lambda_n+2p-1\right)Sin^p\left(\theta_0\right)}\end{array}\right\}$$

$$\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)\frac{d}{d\mu}P_{\lambda_n}^{-m}(\mu_0) =$$

$$\frac{\Gamma(\lambda_n - m)}{\Gamma\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\times(\lambda_n - m)\times\left[\begin{array}{l}\frac{\lambda_n\mu_0}{\lambda_n+\frac{1}{2}}\left\{\begin{array}{l} Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\theta_0 - m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+ \\ +\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)\times \\ \times Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{2p+1}{2}\right)\theta_0 - m\frac{\pi}{2}-(2p+1)\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right\}}{2^{2p}\,p!\left(2\lambda_n+3\right)\cdots\left(2\lambda_n+2p+1\right)Sin^p\left(\theta_0\right)}\end{array}\right\} \\ -\left\{\begin{array}{l} Cos\left(\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0 - m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+ \\ +\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)\times \\ \times Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{2p-1}{2}\right)\theta_0 - m\frac{\pi}{2}-(2p+1)\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right\}}{2^{2p}\,p!\left(2\lambda_n+1\right)\cdots\left(2\lambda_n+2p-1\right)Sin^p\left(\theta_0\right)}\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

On peu aussi écrire l'expression comme suit :

$$\left(\mu_0{}^2-1\right)\frac{d}{d\mu}P_{\lambda_n}^{-m}(\mu_0)=$$

$$-\frac{\Gamma(\lambda_n-m+1)}{\Gamma\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{l}Cos\left(\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2\lambda_n\mu_0}{2\lambda_n+1}Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\+\sum_{p=1}^{+\infty}\left[\begin{array}{l}\frac{\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)}{2^{2p}p!(2\lambda_n+1)\cdots(2\lambda_n+2p-1)Sin^p(\theta_0)}\times\\ \times\left\{\begin{array}{l}Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{2p-1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-(2p+1)\frac{\pi}{4}\right)-\\-\frac{2\lambda_n\mu_0}{(2\lambda_n+2p+1)}Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{2p+1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-(2p+1)\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right\}\end{array}\right]\end{array}\right]$$

En développant à l'ordre p=1, cela donne :

$$\left(\mu_0{}^2-1\right)\frac{d}{d\mu}P_{\lambda_n}^{-m}(\mu_0)=\frac{\Gamma(\lambda_n-m+1)}{\Gamma\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\ Sin(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\frac{\lambda_n\mu_0}{\lambda_n+\frac{1}{2}}\left\{Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(1^2-4m^2\right)\times Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{3}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}{4(2\lambda_n+3)Sin(\theta_0)}\right\}-\\-\left\{Cos\left(\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(1^2-4m^2\right)Cos\left(\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}{4(2\lambda_n+1)Sin(\theta_0)}\right\}\end{array}\right]$$

$$=\frac{2\Gamma(\lambda_n-m+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)}\left[\begin{array}{l}-\frac{Cos\left(\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0-\frac{\pi}{4}-m\frac{\pi}{2}\right)}{(2\ Sin(\theta_0))^{\frac{1}{2}}}+\frac{Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\theta_0-\frac{\pi}{4}-m\frac{\pi}{2}\right)}{(2\ Sin(\theta_0))^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{\lambda_n\mu_0}{\lambda_n+\frac{1}{2}}\right\}-\\-\left\{\frac{Cos\left(\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0-\frac{3\pi}{4}-m\frac{\pi}{2}\right)}{(2\ Sin(\theta_0))^{\frac{3}{2}}}\right\}\left\{\frac{\left(1^2-4m^2\right)}{2(2\lambda_n+1)}\right\}\\+\frac{Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{3}{2}\right)\theta_0-\frac{3\pi}{4}-m\frac{\pi}{2}\right)}{(2\ Sin(\theta_0))^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{\lambda_n\mu_0}{\lambda_n+\frac{1}{2}}\frac{\left(1^2-4m^2\right)}{2(2\lambda_n+3)}\right\}\end{array}\right].$$

En utilisant le fait que Cos[x]=-Sin[x-π/2], c'est le début du développement donné dans l'article de Pal Bholanath, en changeant m en -m puisqu'il choisit développer des ordres positifs.

En première approximation la formule s'annule pour les racines de grandes valeurs telles que :

$$\frac{\lambda_n\mu_0}{\lambda_n+\frac{1}{2}}Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=Cos\left(\left(\lambda_n-1+\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mu_0Cos\left(\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=Cos\left(\left(\lambda_n-1+\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Posons\ \varphi=\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow Cos(\varphi)=\mu_0Cos(\varphi+\theta_0)\quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$Cos(\varphi)=\mu_0\{Cos(\varphi)Cos(\theta_0)-Sin(\varphi)Sin(\theta_0)\}\Leftrightarrow Cos(\varphi)\left(1-\mu_0{}^2\right)+Sin(\varphi)\mu_0\sqrt{1-\mu_0{}^2}=0$$

$$En\ posant\ Cos(\beta)=r\left(1-\mu_0{}^2\right)\quad Sin(\beta)=r\mu_0\sqrt{1-\mu_0{}^2}\Leftrightarrow Tan(\beta)=\frac{\mu_0}{\sqrt{1-\mu_0{}^2}}=\frac{Cos(\theta_0)}{Sin(\theta_0)}=Cotan(\theta_0)$$

$$\Leftrightarrow \beta=\frac{\pi}{2}-\theta_0\qquad \left(1-\mu_0{}^2\right)+Sin(\varphi)\mu_0\sqrt{1-\mu_0{}^2}=0\Leftrightarrow Cos(\varphi-\beta)=0\Rightarrow\varphi=\frac{2k+1}{2}\pi+\beta$$

$$\Rightarrow\varphi=\frac{2k+1}{2}\pi+\beta\Rightarrow\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{2k+1}{2}\pi+\frac{\pi}{2}-\theta_0$$

$$\Rightarrow\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0=\pi\left(k+\frac{5}{4}+\frac{m}{2}\right)-\theta_0\Rightarrow\lambda_n-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2\theta_0}\left(2k+m+\frac{5}{2}\right)-1\Rightarrow\lambda_n+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2\theta_0}\left(2k+m+\frac{5}{2}\right)$$

$$Posons\ x=\lambda_n-\frac{1}{2}\quad et\quad x_0=\frac{\pi}{2\theta_0}\left(2k+m+\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\lambda_n=\frac{\pi}{2\theta_0}\left(2k+m+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}=x_0+\frac{\pi}{2\theta_0}-1$$

Pour trouver les approximations d'ordre supérieur, on doit transformer le développement initial :

$$\left.\begin{array}{l}x=\lambda_n-\frac{1}{2}\\ \beta=\frac{\pi}{2}-\theta_0\\ \lambda_n=x+\frac{1}{2}\\ \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\frac{1}{2}}=\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=(x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\quad\left(\lambda_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\\ \left(\lambda_n+\frac{2p+1}{2}\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-(2p+1)\frac{\pi}{4}=(x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}-p\beta\\ \left(\left(\lambda_n+\frac{2p+1}{2}-1\right)\theta_0-m\frac{\pi}{2}-(2p+1)\frac{\pi}{4}\right)=x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}-p\beta\end{array}\right.$$

$$\frac{(2\lambda_n+1)}{2}=x+1\quad\frac{(2\lambda_n+3)}{2}=x+2\quad\frac{(2\lambda_n+5)}{2}=x+3\quad\frac{(2\lambda_n+2p-1)}{2}=x+p\quad\frac{(2\lambda_n+2p+1)}{2}=x+p+1$$

$$\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{\begin{array}{l}Cos\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)+\\ +\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)\times\\ \times Cos\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}-p\beta\right)\end{array}\right\}}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)+\\ +\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(1^2-4m^2\right)\left(3^2-4m^2\right)\cdots\left((2p-1)^2-4m^2\right)\times\\ \times Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}-p\beta\right)\end{array}\right\}}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right.$$

.

D'abord développons le cosinus dans la sommation, ainsi que $Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)$ *en fonction des deux expressions :* $Cos\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $Sin\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)$*, il vient :*

$$\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{\begin{array}{l}Cos\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)+\\ +\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)\times\\ \times\left[Cos\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Cos(p\beta)+Sin\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Sin(p\beta)\right]\end{array}\right\}}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}Cos\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Cos(\theta_0)+Sin\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Sin(\theta_0)\\ +\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)\times\\ \times\left[Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Cos(p\beta+\theta_0)+Sin\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Sin(p\beta+\theta_0)\right]\end{array}\right\}}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow Cos\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)\left\{\begin{array}{l}\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta)}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\right\}-\\ -Cos(\theta_0)-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta+\theta_0)}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}=$$

$$=Sin\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)\left\{\begin{array}{l}-\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta)}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}+\\ +Sin(\theta_0)+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta+\theta_0)}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}$$

Il vient alors une forme similaire à celle trouvée dans l'article de MacDonald :

$$\frac{Sin\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)}{Cos\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{N(x)}{D(x)}$$

$$N(x)=\left\{\begin{array}{l}\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta)}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\right\}-\\ -Cos(\theta_0)-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta+\theta_0)}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}$$

$$D(x)=\left\{\begin{array}{l}-\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta)}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}+\\ +Sin(\theta_0)+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta+\theta_0)}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}.$$

On fait alors apparaître la valeur x_0, soit dans cette première forme de développement, comme suit :

$$\frac{Sin\left(\left(x+1\right)\theta_0-\left(2m+1\right)\frac{\pi}{4}\right)}{Cos\left(\left(x+1\right)\theta_0-\left(2m+1\right)\frac{\pi}{4}\right)}=Tan\left(\left(x+1\right)\theta_0-\left(2m+1\right)\frac{\pi}{4}\right)\quad avec\quad x_0=\frac{\pi}{2\theta_0}\left(2k+m+\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\left(x-x_0\right)\theta_0=x\theta_0-\frac{\pi}{4}\left(4k+2m+3\right)\Rightarrow\left(x+1-x_0\right)\theta_0=\left(x+1\right)\theta_0-\left(2m+1\right)\frac{\pi}{4}-\pi\left(k+1\right)$$

Comme la tangente est définie à un nombre kπ près, l'équation transcendantale des racines devient alors pour la première forme :

$$Tan\left(\left(x+1-x_0\right)\theta_0\right)=\frac{N(x)}{D(x)}=U(x)\qquad\mu_0=Cos\left(\theta_0\right)$$

$$p\beta+\theta_0=\left(p-1\right)\beta+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}Cos\left(p\beta+\theta_0\right)=Cos\left(\left(p-1\right)\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-Sin\left(\left(p-1\right)\beta\right)\\Sin\left(p\beta+\theta_0\right)=Sin\left(\left(p-1\right)\beta+\frac{\pi}{2}\right)=Cos\left(\left(p-1\right)\beta\right)\end{cases}$$

$$N(x)=\begin{Bmatrix}-\frac{Cos(\theta_0)}{2(x+1)}+\frac{(1+2x)}{2(x+1)}Cos(\theta_0)\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta)}{2^{2p}\,p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}-\\+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin((p-1)\beta)}{2^{2p}\,p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{Bmatrix}$$

$$D(x)=\begin{Bmatrix}-\frac{(1+2x)}{2(x+1)}Cos(\theta_0)\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta)}{2^{2p}\,p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}+\\+Sin(\theta_0)+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos((p-1)\beta)}{2^{2p}\,p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{Bmatrix}$$

Donnons l'expression des développements dans cette première forme pour p=1 :

$$\beta+\theta_0=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}Cos\left(\beta+\theta_0\right)=0\\Sin\left(\beta+\theta_0\right)=1\end{cases}\quad Cos(\beta)=Sin(\theta_0)\quad Sin(\beta)=Cos(\theta_0)$$

$$N(x)=-\frac{Cos(\theta_0)}{2(x+1)}+\frac{(1+2x)}{2(x+1)}Cos(\theta_0)\frac{(1^2-4m^2)Cos(\beta)}{8(x+2)Sin(\theta_0)}$$

$$\Rightarrow N(x)=-\frac{Cos(\theta_0)}{2(x+1)}+\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\frac{(1^2-4m^2)Cos(\theta_0)}{8(x+2)}$$

$$D(x)=-\frac{(1+2x)}{2(x+1)}Cos(\theta_0)\frac{(1^2-4m^2)Sin(\beta)}{8(x+2)Sin(\theta_0)}+Sin(\theta_0)+\frac{(1^2-4m^2)Sin(\beta+\theta_0)}{8(x+1)Sin(\theta_0)}$$

$$\Rightarrow D(x)=Sin(\theta_0)-\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\frac{(1^2-4m^2)Cos^2(\theta_0)}{8(x+2)Sin(\theta_0)}+\frac{(1^2-4m^2)}{8(x+1)Sin(\theta_0)}$$

Choisissons maintenant de développer à partir de la même expression de départ le cosinus de la sommation ainsi que $Cos\left((x+1)\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)$ *en fonction des deux expressions :* $Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $Sin\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)$*, il vient une expression similaire à celle de l'article de MacDonald :*

$$\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{\begin{array}{l}Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Cos(\theta_0)-Sin\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Sin(\theta_0)\\+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)\times\\\times\left[Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Cos(p\beta-\theta_0)+Sin\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Sin(p\beta-\theta_0)\right]\end{array}\right\}}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)+\\+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)\times\\\times\left[Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Cos(p\beta)+Sin\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)Sin(p\beta)\right]\end{array}\right\}}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)\left\{\begin{array}{l}\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{Cos(\theta_0)+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta-\theta_0)}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\right\}-\\-1-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta)}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}=$$

$$=Sin\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)\left\{\begin{array}{l}\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0Sin(\theta_0)-\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta-\theta_0)}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\\+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta)}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{Sin\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)}{Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{Cos(\theta_0)+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta-\theta_0)}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\right\}\\-1-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta)}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0Sin(\theta_0)-\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta-\theta_0)}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\\+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta)}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{array}\right\}}$$

.

Si l'on présente l'autre développement comme suit :

$$\frac{Sin\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)}{Cos\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)}=Tan\left(x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)\quad avec\quad x_0=\frac{\pi}{2\theta_0}\left(2k+m+\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (x-x_0)\theta_0=x\theta_0-\frac{\pi}{4}(4k+2m+3)\Rightarrow (x-x_0)\theta_0=x\theta_0-(2m+1)\frac{\pi}{4}-\pi(k+1)-\frac{\pi}{2}$$

Et pour cette seconde forme développement, on obtient :

$$Tan\left((x-x_0)\theta_0-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{N(x)}{D(x)}=U(x)\qquad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$p\beta-\theta_0=(p+1)\beta-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}Cos(p\beta-\theta_0)=Cos\left((p+1)\beta-\frac{\pi}{2}\right)=Sin((p+1)\beta)\\ Sin(p\beta-\theta_0)=Sin\left((p+1)\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-Cos((p+1)\beta)\end{cases}$$

$$N(x)=\begin{Bmatrix}\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{Cos(\theta_0)+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin((p+1)\beta)}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\right\}-\\ -1-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta)}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{Bmatrix}$$

$$D(x)=\begin{Bmatrix}\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0Sin(\theta_0)+\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos((p+1)\beta)}{2^{2p}p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}+\\ +\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta)}{2^{2p}p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{Bmatrix}$$

Les développement restreint à p=1 donnent :

$$\beta+\theta_0=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}Cos(\beta+\theta_0)=0\\ Sin(\beta+\theta_0)=1\end{cases}\quad Cos(\beta)=Sin(\theta_0)\quad Sin(\beta)=Cos(\theta_0)$$

$$N(x)=-\left\{1-\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{Cos(\theta_0)+\frac{(1^2-4m^2)Sin(2\beta)}{2^2(x+2)(2Sin(\theta_0))}\right\}+\frac{(1^2-4m^2)Cos(\beta)}{2^2(x+1)(2Sin(\theta_0))}\right\}$$

$$D(x)=\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0Sin(\theta_0)+\frac{(1^2-4m^2)Sin(\beta)}{2^2(x+1)(2Sin(\theta_0))}+\frac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\frac{(1^2-4m^2)Cos(2\beta)}{2^2(x+2)(2Sin(\theta_0))}.$$

Pour retrouver les développement de Bholanath Pal, on remarque qu'il utilise la variable x_0, or nous avons ici :

$$Tan\left((x-x_0)\theta_0-\frac{\pi}{2}\right)=-Cotan((x-x_0)\theta_0)=\frac{N(x)}{D(x)}=U(x)$$

$$\Rightarrow Tan((x-x_0)\theta_0)=-\frac{D(x)}{N(x)}=\frac{L(x)}{M(x)}\quad avec\quad\begin{cases}M(x)=-N(x)\\ L(x)=D(x)\end{cases}.$$

Avec :

$$L(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left[Sin(\theta_0)+\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos((p+1)\beta)}{2^{2p}\,p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\right]+\\+\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin(p\beta)}{2^{2p}\,p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}\end{cases}$$

$$M(x)=\begin{cases}1+\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Cos(p\beta)}{2^{2p}\,p!(x+1)(x+2)\cdots(x+p)(2Sin(\theta_0))^p}-\\-\dfrac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{Cos(\theta_0)+\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)Sin((p+1)\beta)}{2^{2p}\,p!(x+2)(x+3)\cdots(x+p+1)(2Sin(\theta_0))^p}\right\}\end{cases}$$

Les développement restreint à p=3 donnent maintenant :

$$\beta+\theta_0=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}Cos(\beta+\theta_0)=0\\Sin(\beta+\theta_0)=1\end{cases}\quad Cos(\beta)=Sin(\theta_0)\quad Sin(\beta)=Cos(\theta_0)$$

$$L(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left[\begin{array}{l}Sin(\theta_0)+\dfrac{(1^2-4m^2)Cos(2\beta)}{2^{2\times1}(x+2)(2Sin(\theta_0))}+\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)Cos(3\beta)}{2^{2\times2}2!(x+2)(x+3)(2Sin(\theta_0))^2}+\\+\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)Cos(4\beta)}{2^{2\times3}3!(x+2)(x+3)(x+4)(2Sin(\theta_0))^3}\end{array}\right]+\\+\dfrac{(1^2-4m^2)Sin(\beta)}{2^{2\times1}(x+1)(2Sin(\theta_0))}+\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)Sin(2\beta)}{2^{2\times2}2!(x+1)(x+2)(2Sin(\theta_0))^2}+\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)Sin(3\beta)}{2^{2\times3}3!(x+1)(x+2)(x+3)(2Sin(\theta_0))^3}\end{cases}$$

$$M(x)=\begin{cases}1+\dfrac{(1^2-4m^2)Cos(\beta)}{2^{2\times1}(x+1)(2Sin(\theta_0))}+\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)Cos(2\beta)}{2^{2\times2}2!(x+1)(x+2)(2Sin(\theta_0))^2}+\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)Cos(3\beta)}{2^{2\times3}3!(x+1)(x+2)(x+3)(2Sin(\theta_0))^3}\\-\dfrac{(1+2x)}{2(x+1)}\mu_0\left\{\begin{array}{l}Cos(\theta_0)+\dfrac{(1^2-4m^2)Sin(2\beta)}{2^{2\times1}(x+2)(2Sin(\theta_0))}+\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)Sin(3\beta)}{2^{2\times2}2!(x+2)(x+3)(2Sin(\theta_0))^2}+\\+\dfrac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)Sin(4\beta)}{2^{2\times3}3!(x+2)(x+3)(x+4)(2Sin(\theta_0))^3}\end{array}\right\}+\end{cases}$$

On pose maintenant les variables suivantes :

$$b_1 = \frac{\mu_0}{2} Cos(\beta) \quad b_2 = \frac{(1^2-4m^2)}{2^2} \frac{Sin(\beta)}{(2Sin(\theta_0))}$$

$$b_3 = \frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2-4m^2)}{2^2} \frac{Cos(2\beta)}{(2Sin(\theta_0))} \quad b_4 = \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2^4 2!} \frac{Sin(2\beta)}{(2Sin(\theta_0))^2}$$

$$b_5 = \frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2^4 2!} \frac{Cos(3\beta)}{(2Sin(\theta_0))^2} \quad b_6 = \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)}{2^6 3!} \frac{Sin(3\beta)}{(2Sin(\theta_0))^3}$$

$$b_7 = \frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)}{2^6 3!} \frac{Cos(4\beta)}{(2Sin(\theta_0))^3} \quad b_8 = \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)(7^2-4m^2)}{2^8 4!} \frac{Sin(4\beta)}{(2Sin(\theta_0))^4}$$

$$\cdots b_{2p} = \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)}{2^{2p} p!} \frac{Sin(p\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p}$$

$$\cdots b_{2p+1} = \frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)}{2^{2p} p!} \frac{Cos((p+1)\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p}$$

$$\Rightarrow L(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1+2x)}{(x+1)}\left[b_1 + \frac{b_3}{(x+2)} + \frac{b_5}{(x+2)(x+3)} + \frac{b_7}{(x+2)(x+3)(x+4)} \right] + \\ + \frac{b_2}{(x+1)} + \frac{b_4}{(x+1)(x+2)} + \frac{b_6}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots \end{array} \right\}$$

$$a_1 = -\frac{\mu_0}{2} Sin(\beta) \quad a_2 = \frac{(1^2-4m^2)}{2^2} \frac{Cos(\beta)}{(2Sin(\theta_0))}$$

$$a_3 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2-4m^2)}{2^2} \frac{Sin(2\beta)}{(2Sin(\theta_0))} \quad a_4 = \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2^4 2!} \frac{Cos(2\beta)}{(2Sin(\theta_0))^2}$$

$$a_5 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2^4 2!} \frac{Sin(3\beta)}{(2Sin(\theta_0))^2} \quad a_6 = \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)}{2^6 3!} \frac{Cos(3\beta)}{(2Sin(\theta_0))^3}$$

$$a_7 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)}{2^6 3!} \frac{Sin(4\beta)}{(2Sin(\theta_0))^3} \quad a_8 = \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)(5^2-4m^2)(7^2-4m^2)}{2^8 4!} \frac{Cos(4\beta)}{(2Sin(\theta_0))^4}$$

$$\cdots a_{2p+1} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)}{2^{2p} p!} \frac{Sin((p+1)\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p}$$

$$\cdots a_{2p} = \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\cdots((2p-1)^2-4m^2)}{2^{2p} p!} \frac{Cos(p\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p}$$

$$\Rightarrow M(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{(1+2x)}{(x+1)}\left\{ a_1 + \frac{a_3}{(x+2)} + \frac{a_5}{(x+2)(x+3)} + \frac{a_7}{(x+2)(x+3)(x+4)} \right\} + \\ + \frac{a_2}{(x+1)} + \frac{a_4}{(x+1)(x+2)} + \frac{a_6}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots \end{array} \right\}$$

$$De\ plus \quad Tan((x-x_0)\theta_0) = \frac{L(x)}{M(x)} \quad et \quad \frac{2b_1}{1+2a_1} = \frac{\mu_0 Sin(\theta_0)}{1-Cos^2(\theta_0)} = \frac{Cos(\theta_0)Sin(\theta_0)}{Sin^2(\theta_0)} = Cotan(\theta_0) = Tan(\beta)$$

Ce sont les deux formes données dans l'article de Bholanath Pal :

$$L(x) = \frac{b_2 + b_1(1+2x)}{(x+1)} + \frac{b_4 + b_3(1+2x)}{(x+1)(x+2)} + \frac{b_6 + b_5(1+2x)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{b_8 + b_7(1+2x)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} + \cdots$$

$$M(x) = 1 + \frac{a_2 + a_1(1+2x)}{(x+1)} + \frac{a_4 + a_3(1+2x)}{(x+1)(x+2)} + \frac{a_6 + a_5(1+2x)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{a_8 + a_7(1+2x)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} + \cdots$$

.

L'équation transcendantale est alors développée en ordre de x croissant, x étant directement lié à la valeur des racines supposées importantes. Supposons que l'on envisage un développement inverse d'ordre 3 sur la variable x. Numérateur L(x) et dénominateur M(x) étant minimum d'ordre 0, il faut les développer tous deux à l'ordre 3, et dans ces calculs, les résultats divergent de l'article original de Pal car nous séparons nettement les expressions de même ordre inverse 1/(x+1) , il vient :

$$L(x)\approx\frac{b_2+b_1(1+2x)}{(x+1)}+\frac{b_4+b_3(1+2x)}{(x+1)(x+2)}+\frac{b_6+b_5(1+2x)}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{b_8+b_7(1+2x)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$\Rightarrow L(x)\approx\frac{b_2+b_1(2+2x)-b_1}{(x+1)}+\frac{b_4+b_3(4+2x)-3b_3}{(x+1)(x+2)}+\frac{b_6+b_5(6+2x)-5b_5}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{b_8+b_7(8+2x)-7b_7}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$\Rightarrow L(x)\approx 2b_1+\frac{b_2-b_1+2b_3}{(x+1)}+\frac{b_4-3b_3+2b_5}{(x+1)(x+2)}+\frac{b_6-5b_5+2b_7}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{b_8-7b_7+2b_9}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$\Rightarrow L(x)\approx 2b_1\left(1+\frac{b_2-b_1+2b_3}{2b_1(x+1)}+\frac{b_4-3b_3+2b_5}{2b_1(x+1)(x+2)}+\frac{b_6-5b_5+2b_7}{2b_1(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{b_8-7b_7+2b_9}{2b_1(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\right)$$

$$M(x)\approx 1+\frac{a_2+a_1(1+2x)}{(x+1)}+\frac{a_4+a_3(1+2x)}{(x+1)(x+2)}+\frac{a_6+a_5(1+2x)}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{a_8+a_7(1+2x)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$\Rightarrow M(x)\approx 1+2a_1+\frac{a_2-a_1+2a_3}{(x+1)}+\frac{a_4-3a_3+2a_5}{(x+1)(x+2)}+\frac{a_6-5a_5+2a_7}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow M(x)\approx(1+2a_1)\left(1+\frac{a_2-a_1+2a_3}{(1+2a_1)(x+1)}+\frac{a_4-3a_3+2a_5}{(1+2a_1)(x+1)(x+2)}+\frac{a_6-5a_5+2a_7}{(1+2a_1)(x+1)(x+2)(x+3)}\right)$$

$$Posons\ A_1=\frac{a_2-a_1+2a_3}{(1+2a_1)}\quad A_2=\frac{a_4-3a_3+2a_5}{(1+2a_1)}\quad A_3=\frac{a_6-5a_5+2a_7}{(1+2a_1)}\quad A_4=\frac{a_8-7a_7+2a_9}{(1+2a_1)}$$

$$B_1=\frac{b_2-b_1+2b_3}{2b_1}\quad B_2=\frac{b_4-3b_3+2b_5}{2b_1}\quad B_3=\frac{b_6-5b_5+2b_7}{2b_1}\quad B_4=\frac{b_8-7b_7+2b_9}{2b_1}$$

$$\Rightarrow\frac{L(x)}{M(x)}\approx\frac{2b_1}{1+2a_1}\,\frac{1+\frac{B_1}{(x+1)}+\frac{B_2}{(x+1)(x+2)}+\frac{B_3}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{B_4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}}{1+\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x+1)(x+2)}+\frac{A_3}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{A_4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{M(x)}\approx\frac{1}{1+2a_1}\left(1-V(x)+V^2(x)-V^3(x)\right)$$

$$avec\ \begin{cases}V(x)=\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x+1)(x+2)}+\frac{A_3}{(x+1)(x+2)(x+3)}\\ V^2(x)\approx\frac{A_1^{\,2}}{(x+1)^2}+\frac{2A_1A_2}{(x+1)^2(x+2)}\quad V^3(x)\approx\frac{A_1^{\,3}}{(x+1)^3}\end{cases}$$

$$\left(1-V(x)+V^2(x)-V^3(x)\right)\approx\left\{\begin{array}{l}1-\left[\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x+1)(x+2)}+\frac{A_3}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right]+\\ +\frac{A_1^{\,2}}{(x+1)^2}+\frac{2A_1A_2}{(x+1)^2(x+2)}-\frac{A_1^{\,3}}{(x+1)^3}\end{array}\right\}$$

.

Dans ces conditions il est plus simple de développer les expressions obtenues, comme suit, et en usant de notation similaire à celle de MacDonald :

$$\frac{L(x)}{M(x)}\approx\frac{2b_1}{1+2a_1}\left\{\begin{array}{l}\left(1+\frac{B_1}{(x+1)}+\frac{B_2}{(x+1)(x+2)}+\frac{B_3}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right)\times\\ \left(1-\left[\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x+1)(x+2)}+\frac{A_3}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right]+\frac{A_1^{\,2}}{(x+1)^2}+\frac{2A_1A_2}{(x+1)^2(x+2)}-\frac{A_1^{\,3}}{(x+1)^3}\right)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{L(x)}{M(x)}\approx\frac{2b_1}{1+2a_1}\left\{\begin{array}{l}1+\frac{B_1-A_1}{(x+1)}+\frac{A_1^{\,2}-A_1B_1}{(x+1)^2}+\frac{A_1^{\,2}B_1-A_1^{\,3}}{(x+1)^3}+\frac{B_2-A_2}{(x+1)(x+2)}+\frac{2A_1A_2-A_1B_2-A_2B_1}{(x+1)^2(x+2)}+\\ +\frac{B_3-A_3}{(x+1)(x+2)(x+3)}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{L(x)}{M(x)}\approx Tan(\beta)\left(1+\frac{c_1}{(x+1)}+\frac{c_2}{(x+1)^2}+\frac{c_3}{(x+1)^3}+\frac{d_2}{(x+1)(x+2)}+\frac{d_3}{(x+1)^2(x+2)}+\frac{e_3}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right)$$

$$c_1=B_1-A_1\quad c_2=A_1^{\,2}-A_1B_1\quad c_3=A_1^{\,2}B_1-A_1^{\,3}\quad d_2=B_2-A_2\quad d_3=2A_1A_2-A_1B_2-A_2B_1\quad e_3=B_3-A_3$$

L'expression de l'équation transcendantale prend alors la forme suivante en développant au troisième ordre inverse en x, et en groupant les termes de même ordre :

$$Tan((x-x_0)\theta_0)=\frac{L(x)}{M(x)}=\alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\quad tel\ que\quad \alpha_0=Tan(\beta)\quad \alpha_1=\frac{c_1}{(x+1)}$$

$$\alpha_2=\frac{c_2}{(x+1)^2}+\frac{d_2}{(x+1)(x+2)}\qquad \alpha_3=\frac{c_3}{(x+1)^3}+\frac{d_3}{(x+1)^2(x+2)}+\frac{e_3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

.

Appliquons la formule de Lagrange qui donne le développement d'une fonction analytique quelconque f(z) autour d'une racine de l'équation transcendantale :

$$Equation\quad z=z_0+uF(z)\qquad Développement\ de\quad f(z)\ autour\ de\ z_0$$

$$f(z)=f(z_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left\{f'(t)[F(t)]^k\right\}\Big|_{t=z_0}\qquad Ici\quad z=x\quad u=\frac{1}{\theta_0}\quad z_0=x_0$$

$$F(x)=Arctan(U(x))\quad f(x)=x\Rightarrow x=x_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\theta_0^{\,k}k!}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left\{[Arctan(U(t))]^k\right\}\Big|_{t=x_0}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}k=1\rightarrow\frac{1}{\theta_0}\{Arctan(U(x_0))\}\quad k=2\rightarrow\frac{1}{2!\theta_0^{\,2}}\frac{d}{dt}\left\{[Arctan(U(t))]^2\right\}\Big|_{t=x_0}=\frac{Arctan(U(x_0))U'(x_0)}{\theta_0^{\,2}(1+U(x_0)^2)}\\ k=3\rightarrow\frac{1}{6\theta_0^{\,3}}\frac{d^2}{dt^2}\left\{[Arctan(U(t))]^3\right\}\Big|_{t=x_0}=\\ =\frac{Arctan(U(x_0))\left\{2(U'(x_0))^2[1-U(x_0)Arctan(U(x_0))]+U''(x_0)\left(1+(U(x_0))^2\right)Arctan(U(x_0))\right\}}{2\theta_0^{\,3}\left(1+U(x_0)^2\right)^2}\end{array}\right.$$

$$Soit\ la\ série\quad x=x_0+\frac{1}{\theta_0}Arctan(U(x_0))+\frac{Arctan(U(x_0))}{\theta_0^{\,2}}\frac{U'(x_0)}{1+(U(x_0))^2}+$$

$$+\frac{Arctan(U(x_0))}{2\theta_0^{\,3}\left(1+(U(x_0))^2\right)^2}\left\{2(U'(x_0))^2[1-U(x_0)Arctan(U(x_0))]+U''(x_0)\left(1+(U(x_0))^2\right)Arctan(U(x_0))\right\}+\cdots$$

$$De\ plus\ si\ |U(x_0)|<1\Rightarrow Arctan(U(x_0))=U(x_0)-\frac{1}{3}(U(x_0))^3+\frac{1}{5}(U(x_0))^3+\cdots$$

Il vient donc le développement formel de l'approximation avec les dérivées successives de l'ArcTangente. En effet on ne peut utiliser le développement simple de ArcTan[U(x)]=U(x)-U(x)³/3, car U(x) n'est pas de faible valeur :

$$Tan\big((x-x_0)\theta_0\big)=\alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=U(x)$$

$$\Rightarrow \lambda_n \approx \frac{1}{2}+x_0+\frac{1}{\theta_0}\big[ArcTan(U(x))\big]_{x=x_0}+\frac{1}{2!\theta_0^{\,2}}\left[\frac{d}{dx}ArcTan(U(x))\right]_{x=x_0}+\frac{1}{3!\theta_0^{\,3}}\left[\frac{d^2}{dx^2}ArcTan(U(x))\right]_{x=x_0}$$

$$Soit\quad \lambda_n \approx \frac{1}{2}+x_0+\frac{1}{\theta_0}Arctan(U(x_0))+\frac{Arctan(U(x_0))}{\theta_0^{\,2}}\frac{U'(x_0)}{1+(U(x_0))^2}+$$

$$+\frac{Arctan(U(x_0))}{2\theta_0^{\,3}\left(1+(U(x_0))^2\right)^2}\left\{2(U'(x_0))^2\big[1-U(x_0)Arctan(U(x_0))\big]+U''(x_0)\left(1+(U(x_0))^2\right)Arctan(U(x_0))\right\}+\cdots$$

Mais on peut développer l'ArcTangente autour de Tan(β) comme suit :

$$U(x)=\alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=Tan(\beta)+\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\quad z_0=\alpha_0\quad (z-z_0)=\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

$$De\ plus\ \alpha_0(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)<<1\ puisque\ en\ ordre\ inverse\ de\ x_0$$

$$\frac{d}{dz}ArcTan(z)=\frac{1}{1+z^2}\quad \frac{d^2}{dz^2}ArcTan(z)=\frac{-2z}{\left(1+z^2\right)^2}\quad \frac{d^3}{dz^3}ArcTan(z)=2\frac{3z^2-1}{\left(1+z^2\right)^3}$$

$$\Rightarrow ArcTan(z)\approx ArcTan(z_0)+(z-z_0)\frac{d}{dz}ArcTan(z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{2!}\frac{d^2}{dz^2}ArcTan(z_0)+\frac{(z-z_0)^3}{3!}\frac{d^3}{dz^3}ArcTan(z_0)$$

$$\Rightarrow ArcTan(U(x))\approx ArcTan(Tan(\beta))+\frac{\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{1+\alpha_0^{\,2}}-\frac{\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}{\left(1+\alpha_0^{\,2}\right)^2}+\frac{\left(3\alpha_0^{\,2}-1\right)}{3}\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3}{\left(1+\alpha_0^{\,2}\right)^3}$$

Ce qui donne les approximations suivantes restreinte à l'ordre inverse 3 :

$$\Rightarrow ArcTan(U(x))\approx \beta+\frac{\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{1+\alpha_0^{\,2}}-\frac{\alpha_0}{\left(1+\alpha_0^{\,2}\right)^2}\left(\alpha_1^{\,2}+2\alpha_1\alpha_2\right)+\alpha_1^{\,3}\frac{\left(3\alpha_0^{\,2}-1\right)}{3\left(1+\alpha_0^{\,2}\right)^3}$$

$$U(x)\approx \alpha_0+\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\quad U'(x)\approx \alpha_0(\alpha_1'+\alpha_2')\quad ordre\ inverse\ 2$$

$$Arctan(U(x))\frac{U'(x)}{1+(U(x))^2}\approx \frac{\alpha_0\left(\beta+\frac{\alpha_0\alpha_1}{1+\alpha_0^{\,2}}\right)(\alpha_1'+\alpha_2')}{1+\alpha_0^{\,2}(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\approx \frac{\alpha_0\alpha_1'\left(\beta+\frac{\alpha_0\alpha_1}{1+\alpha_0^{\,2}}\right)+\beta\alpha_0\alpha_2'}{1+\alpha_0^{\,2}(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}$$

$$Restreint\ \grave{a}\ l'ordre\ inverse\ 1\quad \frac{1}{1+\alpha_0^{\,2}(1+\alpha_1)^2}\approx \frac{1}{1+\alpha_0^{\,2}}\frac{1}{1+\frac{2\alpha_0^{\,2}\alpha_1}{1+\alpha_0^{\,2}}}\approx \frac{1}{1+\alpha_0^{\,2}}\left(1-\frac{2\alpha_0^{\,2}\alpha_1}{1+\alpha_0^{\,2}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\alpha_0\alpha_1'\left(\beta+\frac{\alpha_0\alpha_1}{1+\alpha_0^{\,2}}\right)+\beta\alpha_0\alpha_2'\right)\frac{1}{1+\alpha_0^{\,2}}\left(1-\frac{2\alpha_0^{\,2}\alpha_1}{1+\alpha_0^{\,2}}\right)\approx \frac{1}{1+\alpha_0^{\,2}}\left(\beta(\alpha_0\alpha_1'+\alpha_0\alpha_2')+\frac{\alpha_0^{\,2}\alpha_1'\alpha_1}{1+\alpha_0^{\,2}}\right)-\frac{2\beta\alpha_0^{\,3}\alpha_1\alpha_1'}{\left(1+\alpha_0^{\,2}\right)^2}$$

$$Arctan(U(x))\frac{U'(x)}{1+(U(x))^2}\approx \frac{\beta(\alpha_0\alpha_1'+\alpha_0\alpha_2')}{1+\alpha_0^{\,2}}+\frac{\alpha_0^{\,2}(1-2\beta\alpha_0)\alpha_1\alpha_1'}{\left(1+\alpha_0^{\,2}\right)^2}$$

Ce qui donne finalement le développement :

$$\lambda_n \approx \left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}+x_0+\frac{1}{\theta_0}\left\{\beta+\frac{\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{1+\alpha_0^{\,2}}-\frac{\alpha_0}{\left(1+\alpha_0^{\,2}\right)^2}\left(\alpha_1^{\,2}+2\alpha_1\alpha_2\right)+\alpha_1^{\,3}\frac{\left(3\alpha_0^{\,2}-1\right)}{3\left(1+\alpha_0^{\,2}\right)^3}\right\}\\ +\frac{1}{\theta_0^{\,2}}\left\{\frac{\beta\alpha_0(\alpha_1'+\alpha_2')}{1+\alpha_0^{\,2}}+\frac{\alpha_0^{\,2}(1-2\beta\alpha_0)\alpha_1\alpha_1'}{\left(1+\alpha_0^{\,2}\right)^2}\right\}\end{array}\right).$$

On va maintenant donner les développements aux ordres croissant de τ=1/x , en repartant des expressions originales de L(x) et M(x) :

$$A_1 = \frac{a_2 - a_1 + 2a_3}{(1+2a_1)} \quad A_2 = \frac{a_4 - 3a_3 + 2a_5}{(1+2a_1)} \quad A_3 = \frac{a_6 - 5a_5 + 2a_7}{(1+2a_1)} \quad A_p = \frac{a_{2p} - (2p-1)a_{2p-1} + 2a_{2p+1}}{(1+2a_1)}$$

$$B_1 = \frac{b_2 - b_1 + 2b_3}{2b_1} \quad B_2 = \frac{b_4 - 3b_3 + 2b_5}{2b_1} \quad B_3 = \frac{b_6 - 5b_5 + 2b_7}{2b_1} \quad B_p = \frac{b_{2p} - (2p-1)b_{2p-1} + 2b_{2p+1}}{2b_1}$$

$$\frac{L(x)}{M(x)} = \frac{2b_1}{1+2a_1} \frac{1 + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)(x+2)} + \frac{B_3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{B_p}{(x+1)(x+2)\cdots(x+p)}}{1 + \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)(x+2)} + \frac{A_3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{A_p}{(x+1)(x+2)\cdots(x+p)}}$$

$$\tau = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{L(x)}{M(x)} = Tan(\beta) \frac{1 + \frac{\tau B_1}{(1+\tau)} + \frac{\tau^2 B_2}{(1+\tau)(1+2\tau)} + \frac{\tau^3 B_3}{(1+\tau)(1+2\tau)(1+3\tau)} + \cdots + \frac{B_p}{(1+\tau)(1+2\tau)\cdots(1+p\tau)}}{1 + \frac{\tau A_1}{(1+\tau)} + \frac{\tau^2 A_2}{(1+\tau)(1+2\tau)} + \frac{\tau^3 A_3}{(1+\tau)(1+2\tau)(1+3\tau)} + \cdots + \frac{A_p}{(1+\tau)(1+2\tau)\cdots(1+p\tau)}}$$

Il est maintenant facile grâce à Mathematica de donner une expression du développement à un ordre quelconque de τ, voici celui à l'ordre 3 en angle et τ :

$$a_{2p+1} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots((2p-1)^2 - 4m^2)}{2^{2p}\, p!} \frac{Sin((p+1)\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p}$$

$$a_{2p} = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots((2p-1)^2 - 4m^2)}{2^{2p}\, p!} \frac{Cos(p\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p} \quad A_p = \frac{a_{2p} - (2p-1)a_{2p-1} + 2a_{2p+1}}{(1+2a_1)}$$

$$b_{2p} = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots((2p-1)^2 - 4m^2)}{2^{2p}\, p!} \frac{Sin(p\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p}$$

$$b_{2p+1} = \frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots((2p-1)^2 - 4m^2)}{2^{2p}\, p!} \frac{Cos((p+1)\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p} \quad B_p = \frac{b_{2p} - (2p-1)b_{2p-1} + 2b_{2p+1}}{2b_1}$$

$$x_0 = \frac{\pi}{2\theta_0}\left(2k + m + \frac{3}{2}\right) \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \quad \alpha_0 = Tan(\beta)$$

$$\tau = \frac{1}{x_0} \Rightarrow \lambda_n \approx \frac{1}{2} + x_0 + \frac{1}{\theta_0}\left\{ \begin{array}{l} \beta + \frac{1}{3(1+\alpha_0^2)^3} - \tau \frac{\beta\alpha_0(A_1 - B_1)}{(1+\alpha_0^2)} + \tau^2\alpha_0\left(\frac{B_2 - A_2}{(1+\alpha_0^2)} + \frac{A_1^2 - B_1\alpha_0^2 - A_1B_1(1-\alpha_0^2)}{(1+\alpha_0^2)^2}\right) \\ + \frac{\tau^3\alpha_0}{(1+\alpha_0^2)^2}\left(\begin{array}{l} (3(A_2 - B_2 + B_3 - A_3)(1+\alpha_0^2)^2 - 3(A_2B_1 + A_1B_2)(1-\alpha_0^4)) + \\ + (3A_1B_1^2\alpha_0^2 - A_1^3)(3-\alpha_0^2) + (3A_1^2B_1 - B_1^3\alpha_0^2)(1-3\alpha_0^2) + \\ + 6(A_1A_2 - \alpha_0^2B_1B_2)(1+\alpha_0^2) \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\theta_0^2}\left\{ \tau^2 \frac{\beta\alpha_0(A_1 - B_1)}{(1+\alpha_0^2)} + \tau^3\left(\frac{\alpha_0^2(A_1 - B_1)^2(2\beta\alpha_0 - 1)}{(1+\alpha_0^2)^2} - \frac{2\beta\alpha_0(A_1^2 - A_1B_1 + B_2 - A_2)}{(1+\alpha_0^2)} \right) \right\} +$$

$$- \frac{\tau^3}{\theta_0^3} \frac{\beta^2\alpha_0}{(1+\alpha_0^2)}(A_1 - B_1)$$

Quant aux résultats de Bholanath Pal, dans leurs formes « originales », ils sont partiellement repris dans un article de 1950 de P.A.Carrus et C.G.Treunfels, « Table of roots and incomplete integrals of associated Legendre functions of fractional orders ».

L'article ne les calcule que pour la valeur m=1. A partir des mêmes coefficients de départ dans l'expression L(x)/M(x) :

$$a_1 = -\frac{\mu_0}{2} Sin(\beta) \quad a_2 = \frac{(1^2 - 4m^2)}{2^2} \frac{Cos(\beta)}{(2Sin(\theta_0))}$$

$$a_3 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2 - 4m^2)}{2^2} \frac{Sin(2\beta)}{(2Sin(\theta_0))} \quad a_4 = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)}{2^4 2!} \frac{Cos(2\beta)}{(2Sin(\theta_0))^2}$$

$$a_5 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)}{2^4 2!} \frac{Sin(3\beta)}{(2Sin(\theta_0))^2} \quad a_6 = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)(5^2 - 4m^2)}{2^6 3!} \frac{Cos(3\beta)}{(2Sin(\theta_0))^3}$$

$$a_7 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)(5^2 - 4m^2)}{2^6 3!} \frac{Sin(4\beta)}{(2Sin(\theta_0))^3} \quad a_8 = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)(5^2 - 4m^2)(7^2 - 4m^2)}{2^8 4!} \frac{Cos(4\beta)}{(2Sin(\theta_0))^4}$$

$$\cdots a_{2p+1} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots((2p-1)^2 - 4m^2)}{2^{2p}\, p!} \frac{Sin((p+1)\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p}$$

$$\cdots a_{2p} = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots((2p-1)^2 - 4m^2)}{2^{2p}\, p!} \frac{Cos(p\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p}$$

$$b_1 = \frac{\mu_0}{2} Cos(\beta) \quad b_2 = \frac{(1^2 - 4m^2)}{2^2} \frac{Sin(\beta)}{(2Sin(\theta_0))}$$

$$b_3 = \frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2 - 4m^2)}{2^2} \frac{Cos(2\beta)}{(2Sin(\theta_0))} \quad b_4 = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)}{2^4 2!} \frac{Sin(2\beta)}{(2Sin(\theta_0))^2}$$

$$b_5 = \frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)}{2^4 2!} \frac{Cos(3\beta)}{(2Sin(\theta_0))^2} \quad b_6 = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)(5^2 - 4m^2)}{2^6 3!} \frac{Sin(3\beta)}{(2Sin(\theta_0))^3}$$

$$b_7 = \frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)(5^2 - 4m^2)}{2^6 3!} \frac{Cos(4\beta)}{(2Sin(\theta_0))^3} \quad b_8 = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)(5^2 - 4m^2)(7^2 - 4m^2)}{2^8 4!} \frac{Sin(4\beta)}{(2Sin(\theta_0))^4}$$

$$\cdots b_{2p} = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots((2p-1)^2 - 4m^2)}{2^{2p}\, p!} \frac{Sin(p\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p}$$

$$\cdots b_{2p+1} = \frac{\mu_0}{2} \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)\cdots((2p-1)^2 - 4m^2)}{2^{2p}\, p!} \frac{Cos((p+1)\beta)}{(2Sin(\theta_0))^p}$$

La fraction L(x)/M(x) se développe sous la forme :

$$L(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1+2x)}{(x+1)}\left[b_1 + \frac{b_3}{(x+2)} + \frac{b_5}{(x+2)(x+3)} + \frac{b_7}{(x+2)(x+3)(x+4)} \right] + \\ + \frac{b_2}{(x+1)} + \frac{b_4}{(x+1)(x+2)} + \frac{b_6}{(x+1)(x+2)(x+3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widetilde{L}(x)$$

$$M(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{(1+2x)}{(x+1)} a_1 + \frac{(1+2x)}{(x+1)}\left\{ \frac{a_3}{(x+2)} + \frac{a_5}{(x+2)(x+3)} + \frac{a_7}{(x+2)(x+3)(x+4)} \right\} + \\ + \frac{a_2}{(x+1)} + \frac{a_4}{(x+1)(x+2)} + \frac{a_6}{(x+1)(x+2)(x+3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widetilde{M}(x)$$

$$\widetilde{L}(x) = \left\{ (1+2x)\left[b_1 + \frac{b_3}{(x+2)} + \frac{b_5}{(x+2)(x+3)} + \frac{b_7}{(x+2)(x+3)(x+4)} \right] + b_2 + \frac{b_4}{(x+2)} + \frac{b_6}{(x+2)(x+3)} \right\}$$

$$\widetilde{M}(x) = \left\{ A + (1+2x)\left\{ \frac{a_3}{(x+2)} + \frac{a_5}{(x+2)(x+3)} + \frac{a_7}{(x+2)(x+3)(x+4)} \right\} + a_2 + \frac{a_4}{(x+2)} + \frac{a_6}{(x+2)(x+3)} \right\}$$

$$\frac{L(x)}{M(x)} = \frac{\widetilde{L}(x)}{\widetilde{M}(x)} = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \qquad On\ pose \quad A = (1 + a_1 + x(1 + 2a_1))$$

.

Avec les quatre expressions fonctions de x :

$$\alpha_0 = \frac{b_1(1+2x)}{A} \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha_0}{A}\left(a_2 + \frac{(1+2x)a_3}{2+x}\right) + \frac{1}{A}\left(b_2 + \frac{(1+2x)b_3}{2+x}\right)$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} -\frac{\alpha_0}{A}\left(\frac{a_4}{(2+x)} + \frac{(1+2x)a_5}{(2+x)(3+x)} - \frac{1}{A}\left(a_2 + \frac{(1+2x)a_3}{2+x}\right)^2\right) - \frac{1}{A^2}\left(a_2 + \frac{(1+2x)a_3}{2+x}\right)\left(b_2 + \frac{(1+2x)b_3}{2+x}\right) + \\ + \frac{1}{A}\left(\frac{b_4}{2+x} + \frac{(1+2x)b_5}{(2+x)(3+x)}\right) \end{cases}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_0}{A}\begin{pmatrix} \frac{a_6}{(2+x)(3+x)} + \frac{(1+2x)a_7}{(2+x)(3+x)(4+x)} - \frac{2}{A}\left(a_2 + \frac{(1+2x)a_3}{2+x}\right)\left(\frac{a_4}{2+x} + \frac{(1+2x)a_5}{(2+x)(3+x)}\right) + \\ + \frac{1}{A}\left(a_2 + \frac{(1+2x)a_3}{2+x}\right)^2 \end{pmatrix} - \\ -\frac{1}{A^2}\left(\frac{a_4}{(2+x)} + \frac{(1+2x)a_5}{(2+x)(3+x)} - \frac{1}{A}\left(a_2 + \frac{(1+2x)a_3}{2+x}\right)^2\right)\left(b_2 + \frac{(1+2x)b_3}{2+x}\right) - \\ -\frac{1}{A^2}\left(a_2 + \frac{(1+2x)a_3}{2+x}\right)\left(\frac{b_4}{2+x} + \frac{(1+2x)b_5}{(2+x)(3+x)}\right) + \\ + \frac{1}{A}\left(\frac{b_6}{(2+x)(3+x)} + \frac{(1+2x)b_7}{(2+x)(3+x)(4+x)}\right) \end{bmatrix}.$$

Le développement de la solution est alors donnée par :

$$x_0 = \frac{\pi}{2\theta_0}\left(2k + m + \frac{3}{2}\right) \quad Tan((x - x_0)\theta_0) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \omega(x)$$

$$\Rightarrow \lambda_n \approx \frac{1}{2} + x_0 + \frac{1}{\theta_0}\left[ArcTan(\omega(x))\right]_{x=x_0} + \frac{1}{2!\theta_0^{\,2}}\left[\frac{d}{dx}ArcTan(\omega(x))\right]_{x=x_0} + \frac{1}{3!\theta_0^{\,3}}\left[\frac{d^2}{dx^2}ArcTan(\omega(x))\right]_{x=x_0}$$

$$\lambda_n \approx \frac{1}{2} + x_0 + \begin{cases} \frac{1}{\theta_0}\left\{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \frac{1}{3}\left(\alpha_0^{\,3} + \alpha_1^{\,3} + 3\alpha_0^{\,2}\alpha_1 + 3\alpha_0^{\,2}\alpha_2 + 3\alpha_0^{\,2}\alpha_3 + 3\alpha_1^{\,2}\alpha_2 + 3\alpha_0\alpha_1^{\,2} + 6\alpha_0\alpha_1\alpha_2\right)\right\} \\ + \frac{1}{\theta_0^{\,2}}\left\{\alpha_0\alpha_0' + \alpha_0\alpha_1' + \alpha_0\alpha_2' + \alpha_1\alpha_1' + \alpha_0'\alpha_1 + \alpha_0'\alpha_2\right\} \end{cases}$$

Laissons donc maintenant cette question de l'évaluation approchée des valeurs propres pour revenir à la suite d'exemples de problèmes aux limites en configuration sphérique conique.

Problème aux limites mixte de Robin en configuration conique-sphérique

Exemple : *Cône sphérique plein d'angle θ_0, en coordonnées sphériques (r,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $r=l_r$. et de Robin homogènes en θ_0*

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta)) \quad \alpha' T_\theta'(r,\theta)+\beta\, T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$T(r,\theta)$ *fini*

$T(r,\theta)$ *fonction paire en* θ *soit* $T(r,-\theta)=T(r,\theta)$

$T(r,\theta)$ *ne comporte aucune singularité en* $\theta=0$, *continue et dérivable*

On peut transformer la condition aux limites en variable z=Cos(θ)

$$\alpha' T_\theta'(r,\theta)+\beta\, T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$$

$$z=Cos(\theta)\Rightarrow \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}=-Sin(\theta)\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial z}$$

$$\alpha' T_\theta'(r,\theta)+\beta\, T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=-\alpha' Sin(\theta_0)T_z'(r,z)+\beta\, T(r,z)\big|_{z=\mu_0}$$

$$\alpha=-\alpha' Sin(\theta_0)$$

$$\Rightarrow \alpha\, T_z'(r,z)+\beta\, T(r,z)\big|_{z=\mu_0}$$

On est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier λ_n $P_n(Cos(\theta))\rightarrow P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$*, ce qui donne la condition suivante pour établir les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville.*

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\,;\, \alpha\frac{dP_{\lambda_n}(z)}{dz}+\beta\, P_{\lambda_n}(z)\bigg|_{z=\mu_0}=0 \quad \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}=\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(zP_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)\right)$$

$$\Rightarrow \alpha\,\frac{\lambda_n}{{\mu_0}^2-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)+\beta\, P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

Exemple

si l'on prend la valeur $\theta_0=\pi/7\,;\alpha=1/2\,;\beta=1/2$*, alors on trouve les 20 premières valeurs propres λ_n =7.93878, 15.0781, 22.1311, 29.1591, 36.1765, 43.1882, 50.1968, 57.2032, 64.2083, 71.2123, 78.2157, 85.2185, 92.2209, 99.2229, 106.225, 113.226, 120.228, 127.229, 134.23, 141.231.*

si l'on prend la valeur $\theta_0=5\pi/6\,;\alpha=1/2\,;\beta=1/2$*, alors on trouve les 20 premières valeurs propres λ_n =1.01732, 2.21493, 3.41202, 4.60986, 5.8083, 7.00714, 8.20625, 9.40555, 10.605, 11.8045, 13.0041, 14.2038, 15.4035, 16.6033, 17.8031, 19.0029, 20.2027, 21.4026, 22.6025, 23.8023.*

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l_r, donne: (il n'est pas nécessaire d'inclure la valeur propre 0 dans le cas général où β≠0, si β=0 alors c'est une condition de Neumann homogène et la valeur propre nulle ne doit pas être oubliée):

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\ \frac{\lambda_n}{\mu_0{}^2 - 1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\right) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)$$

Selon les formules des dérivées premières et seconde d'une fonction de Legendre de degré non entier :

$$\int_{z_1}^{z_2} dz P_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\left[\left(1 - z^2\right)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} - P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda\,\partial z}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{\left(2\lambda_n + 1\right)}$$

$$Développons\ A = \left(1 - z^2\right)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} - P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda\,\partial z}\right) avec\ \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z} = \frac{\lambda_n}{z^2 - 1}\left(zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)\right)$$

$$et\ \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{1}{z^2 - 1}\left(zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)\right) + \frac{\lambda_n}{z^2 - 1}\left(z\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(z)}{\partial \lambda}\right) \Rightarrow$$

$$A = \left(1 - z^2\right)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}\frac{\lambda_n}{z^2 - 1}\left(zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)\right) - P_{\lambda_n}(z)\left(\frac{1}{z^2 - 1}\left(zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)\right) + \frac{\lambda_n}{z^2 - 1}\left(z\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(z)}{\partial \lambda}\right)\right)\right)$$

$$= \lambda_n\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}\left(P_{\lambda_n - 1}(z) - zP_{\lambda_n}(z)\right) + P_{\lambda_n}(z)\left(zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)\right) + \lambda_n P_{\lambda_n}(z)\left(z\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(z)}{\partial \lambda}\right)$$

$$= \lambda_n\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}\left(P_{\lambda_n - 1}(z) - zP_{\lambda_n}(z)\right) + P_{\lambda_n}(z)\left(zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)\right) + \lambda_n\left(zP_{\lambda_n}(z)\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(z)}{\partial \lambda}\right)$$

$$= P_{\lambda_n}(z)\left(z\ P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)\right) + \lambda_n\left(P_{\lambda_n - 1}(z)\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(z)}{\partial \lambda}\right)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\left[P_{\lambda_n}(z)\left(z\ P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n - 1}(z)\right) + \lambda_n\left(P_{\lambda_n - 1}(z)\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(z)}{\partial \lambda}\right)\right]_{z_1}^{z_2}}{\left(2\lambda_n + 1\right)}$$

Dans le cas particulier de notre problème les limites sont définies ainsi $z_1=\mu_0$ et $z_2=1$ et le calcul des normes devient :

$$posons \quad \mu_0 = Cos(\theta_0) \quad z_1 = \mu_0 \quad z_2 = 1$$

$$\Rightarrow \int_{\mu_0}^{1} dz\, P_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\left[P_{\lambda_n}(z)\big(z\,P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n -1}(z)\big) + \lambda_n \left(P_{\lambda_n -1}(z)\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} - P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial P_{\lambda_n -1}(z)}{\partial\lambda} \right) \right]_{\mu_0}^{1}}{(2\lambda_n + 1)}$$

$$on\ a\ P_\lambda(1) = 0\ \forall\lambda \Rightarrow P_{\lambda_n}(z)\big(z\,P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n -1}(z)\big) + \lambda_n \left(P_{\lambda_n -1}(z)\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} - P_{\lambda_n}(z)\frac{\partial P_{\lambda_n -1}(z)}{\partial\lambda} \right)\Bigg|_{z=1} = 0$$

$$\left\| P_{\lambda_n}(z)^2 \right\| = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_0)\big(P_{\lambda_n -1}(\mu_0) - \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)\big) + \lambda_n \left(P_{\lambda_n}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n -1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - P_{\lambda_n -1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} \right)}{(2\lambda_n + 1)}$$

$$or\ \alpha\ \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2} - 1}\big(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n -1}(\mu_0)\big) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0 \Rightarrow P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\alpha\lambda_n}{\mu_0^{\ 2} - 1}\mu_0 + \beta \right) = \frac{\alpha\lambda_n}{\mu_0^{\ 2} - 1} P_{\lambda_n -1}(\mu_0)$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n}(\mu_0) = \frac{\alpha\ \lambda_n}{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)} P_{\lambda_n -1}(\mu_0)\ (1) \Leftrightarrow P_{\lambda_n -1}(\mu_0) = \frac{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)}{\alpha\ \lambda_n} P_{\lambda_n}(\mu_0)\ (2)$$

Première forme (1)

$$\left\| P_{\lambda_n}(z)^2 \right\| = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n + 1)}\left(-P_{\lambda_n -1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} + \alpha\ P_{\lambda_n -1}(\mu_0)\left(\frac{\beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)P_{\lambda_n -1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)\right)^2} + \frac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)}\frac{\partial P_{\lambda_n -1}(\mu_0)}{\partial\lambda} \right) \right)$$

Deuxième forme (2)

$$\left\| P_{\lambda_n}(z)^2 \right\| = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_0)}{(2\lambda_n + 1)}\left(\frac{\beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n} + \lambda_n\left(\frac{\partial P_{\lambda_n -1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \frac{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} \right) \right)$$

$$si\ \beta = 1\ et\ \alpha = 0 \quad C.L.\ de\ Dirichlet$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$\left\| P_{\lambda_n}(z)^2 \right\| = -\frac{\lambda_n}{2\lambda_n + 1} P_{\lambda_n -1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}$$

$$si\ \alpha = 1\ et\ \beta = 0 \quad C.L.\ de\ Neumann$$

$$P_{\lambda_n -1}(\mu_0) = \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)$$

$$\Rightarrow \left\| P_{\lambda_n}(z)^2 \right\| = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n + 1)} P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n -1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} \right)$$

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\ \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2} - 1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\right) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{B_n(2\lambda_n + 1)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} + \alpha\ P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\left(\frac{\beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)\right)^2} + \frac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)}\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{B_n(2\lambda_n + 1)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n} + \lambda_n\left(\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \frac{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (2)$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$, on obtient alors :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n + 1}\left(P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) - P_{\lambda_n + 1}(\mu_0)\right) \Rightarrow (2\lambda_n + 1)B_n = \left(P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) - P_{\lambda_n + 1}(\mu_0)\right)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\ \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2} - 1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\right) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) - P_{\lambda_n + 1}(\mu_0)\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} + \alpha\ P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\left(\frac{\beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)\right)^2} + \frac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)}\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) - P_{\lambda_n + 1}(\mu_0)\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n} + \lambda_n\left(\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \frac{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (2)$$

<u>Etude des cas limites α=1, β=0 (homogène Neumann) et α=0, β=1 (homogène Dirichlet)</u>

Pour ce qui est du passage à la limite α->0, β->1, la forme (1) donne directement la solution déjà énoncée précédemment :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} -\frac{(2\lambda_n + 1)}{\lambda_n} B_n \frac{\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}}$$

Pour le passage à la limite α->1, β->0, la forme (2) donne également la solution déjà énoncée précédemment :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \frac{\lambda_n}{\mu_0^2 - 1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\right) \quad soit \quad \lambda_n = 0 \quad ou \quad \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) = P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)$$

$$Pour \quad \lambda_n > 0 \Rightarrow terme\ identique\ cas\ Neumann$$

$$Pour \quad \lambda_n = 0 \Rightarrow B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad \left\| P_0(z) \right\|^2 = 1 - \mu_0$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0} + \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{(2\lambda_n + 1)}{\lambda_n} \frac{B_n \left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)}$$

Exemple : *Cône sphérique creux d'angle θ_0, en coordonnées sphériques (r,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en $r=l_{r1}$, inhomogènes en $r=l_{r2}$. et de Robin homogènes en θ_0*

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

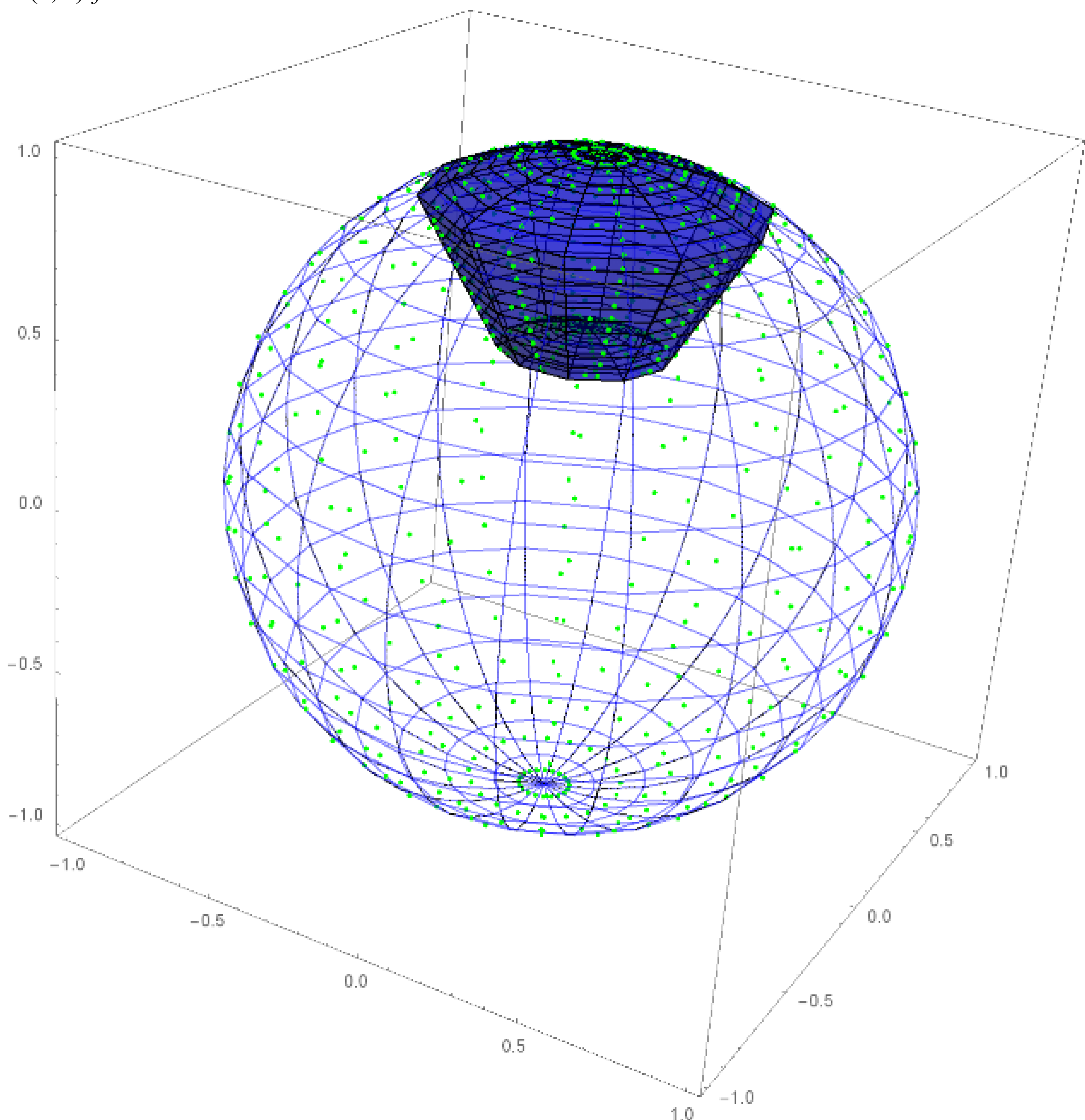
$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$z=Cos(\theta)\ et\ \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$\alpha'\,T_\theta'(r,\theta)+\beta\,T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0\Leftrightarrow\alpha\,T_z'(r,z)+\beta\,T(r,z)\big|_{z=\mu_0}=0$$

$$T(r,\theta)\ fini$$



En suivant la suite de calcul effectué dans l'exemple précédent, on trouve la solution suivante, exprimée sous deux formes :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0) \quad B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\ \frac{\lambda_n}{\mu_0{}^2 - 1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\right) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{B_n(2\lambda_n + 1)\dfrac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n + 1}\right)}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n + 1}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda} + \alpha\ P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0{}^2 - 1\right)P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0 \lambda_n + \beta\left(\mu_0{}^2 - 1\right)\right)^2} + \dfrac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0 \lambda_n + \beta\left(\mu_0{}^2 - 1\right)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)\right)} \qquad (1)$$

ou bien

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{B_n(2\lambda_n + 1)\dfrac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n + 1}\right)}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n + 1}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0{}^2 - 1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n} + \lambda_n\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \dfrac{\alpha\ \mu_0 \lambda_n + \beta\left(\mu_0{}^2 - 1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)\right)} \qquad (2)$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$, on obtient alors :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n + 1}\left(P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) - P_{\lambda_n + 1}(\mu_0)\right) \Rightarrow (2\lambda_n + 1)B_n = \left(P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) - P_{\lambda_n + 1}(\mu_0)\right)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\ \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2} - 1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\right) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) - P_{\lambda_n + 1}(\mu_0)\right) \dfrac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n + 1}\right)}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n + 1}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n \left(-P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda} + \alpha\ P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0 \lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)\right)^2} + \dfrac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0 \lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) - P_{\lambda_n + 1}(\mu_0)\right) \dfrac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n + 1}\right)}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n + 1}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n} + \lambda_n\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \dfrac{\alpha\ \mu_0 \lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2} - 1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)\right)} \quad (2)$$

Etude des cas limites α=1, β=0 (homogène Neumann) et α=0, β=1 (homogène Dirichlet)

Pour ce qui est du passage à la limite α->0, β->1 (Dirichlet), la forme (1) donne directement la solution déjà énoncée précédemment :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} -\frac{(2\lambda_n + 1)}{\lambda_n} B_n \frac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n + 1}\right)}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n + 1}\right)} \frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}}$$

Pour le passage à la limite α->1, β->0, la forme (2) donne également la solution déjà énoncée précédemment (en y ajoutant la valeur propre nulle car la condition homogène est de Neumann) :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \frac{\lambda_n}{\mu_0{}^2 - 1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)\right) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0 \quad ou \quad \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) = P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)$$

$$On\ rajoute\ la\ solution\ \lambda_n = 0 \Rightarrow B_0 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad et \quad \left\|P_0(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz = 1 - \mu_0$$

$$\lambda_n > 0 \Rightarrow B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad et \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = \frac{\lambda_n P_{\lambda_n}(\mu_0)}{(2\lambda_n + 1)}\left(\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0}\frac{\left(1 - \frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(1 - \frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)} + \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{(2\lambda_n + 1) B_n \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n + 1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n + 1}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)} \qquad (2)$$

Problèmes aux limites sur des sections coniques-sphériques

Quelques propriétés des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce pour les degrés λ_n non entiers pour des problèmes aux limites de Dirichlet

Les fonctions et valeurs propres du problème aux limites ont les propriétés suivantes :

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad \lambda_n\ tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \Leftrightarrow \begin{cases}\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)=0\\ \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)=0\end{cases}$$

Les fonctions de Legendre utilisées ici sont donc à degré non entiers, en tant que racine de l'équation transcendantale. Il se trouve que lorsque justement les degrés sont non entiers, alors les fonctions sont liées par des formules de liaison (dans ce cas le terme en sinus ne s'annulent pas!):

$$P_{\lambda_n}(z), P_{\lambda_n}(-z) \quad \textit{linéairement indépendantes}$$

$$Q_{\lambda_n}(z), Q_{\lambda_n}(-z) \quad \textit{linéairement indépendantes}$$

$$P_{\lambda_n}(z) = -\frac{2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\left(Cos(\lambda_n\pi)Q_{\lambda_n}(z) + Q_{\lambda_n}(-z)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}(z) = \frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)}\left(Cos(\lambda_n\pi)P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n}(-z)\right)$$

.

Formons les combinaisons linéaires paires et impaires des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce, il vient :

$$P_{\lambda_n}(z) + P_{\lambda_n}(-z) = -\frac{2\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\left(Q_{\lambda_n}(z) + Q_{\lambda_n}(-z)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}(z) + Q_{\lambda_n}(-z) = \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}{2Sin(\lambda_n\pi)}\left(P_{\lambda_n}(z) + P_{\lambda_n}(-z)\right)$$

De même :

$$P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n}(-z) = -\frac{2\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\left(Q_{\lambda_n}(z) - Q_{\lambda_n}(-z)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}(z) - Q_{\lambda_n}(-z) = \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}{2Sin(\lambda_n\pi)}\left(P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n}(-z)\right)$$

Donnons quelques propriétés des valeurs propres et des fonctions propres dans le cas $\vartheta_2=\pi-\vartheta_1$, $\mu_1=-\mu_2$:

$$\mu_1 = Cos(\theta_2);\ \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad \lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\theta_2 = \pi - \theta_1 \Rightarrow \mu_1 = -\mu_2 \Rightarrow \lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)}$$

Ce qui donne :

$$\alpha = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)}$$

$$= \frac{\left(Cos(\lambda_n\pi)P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n}(-\mu_2)\right)}{\left(Cos(\lambda_n\pi)P_{\lambda_n}(-\mu_2) - P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)} = \frac{\left(\alpha\, Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}{\left(Cos(\lambda_n\pi)-\alpha\right)} \Rightarrow \alpha = \frac{\left(\alpha\, Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}{\left(Cos(\lambda_n\pi)-\alpha\right)} \Rightarrow \alpha^2 = 1$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)}\right)^2 = \left(\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)}\right)^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \pm 1$$

.

Il apparait donc deux cas de figure selon les valeurs propres: le cas de valeurs identiques ou opposées aux extrémités :

$$Cas \quad \alpha = 1 = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} \Rightarrow valeurs\ identiques\ aux\ extrémités$$

$$Cas \quad \alpha = -1 = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} \Rightarrow valeurs\ opposées\ aux\ extrémités$$

En appliquant cette dernière propriété remarquable des fonctions propres aux limites du domaine, en la combinant avec les formules de liaisons entre fonctions de première et deuxième espèce, il vient pour le cas pair :

$$Cas \quad \alpha = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} = 1 \Rightarrow valeurs\ identiques\ aux\ extrémités$$

$$P_{\lambda_n}(\mu_2) = -\frac{2\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}{\pi\ Sin(\lambda_n\pi)} Q_{\lambda_n}(\mu_2)$$

$$Q_{\lambda_n}(\mu_2) = \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}{2Sin(\lambda_n\pi)} P_{\lambda_n}(\mu_2)$$

Et pour le cas impair :

$$Cas \quad \alpha = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} = -1 \Rightarrow valeurs\ opposées\ aux\ extrémités$$

$$P_{\lambda_n}(\mu_2) = -\frac{2\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}{\pi\ Sin(\lambda_n\pi)} Q_{\lambda_n}(\mu_2)$$

$$Q_{\lambda_n}(\mu_2) = \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}{2Sin(\lambda_n\pi)} P_{\lambda_n}(\mu_2)$$

.

De ces diverses formules on peut tirer une propriété remarquable des fonctions propres à savoir :

$$Cas \quad \alpha = 1 = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)}$$

$$Fonctions\ propres\ \Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\ impaires$$

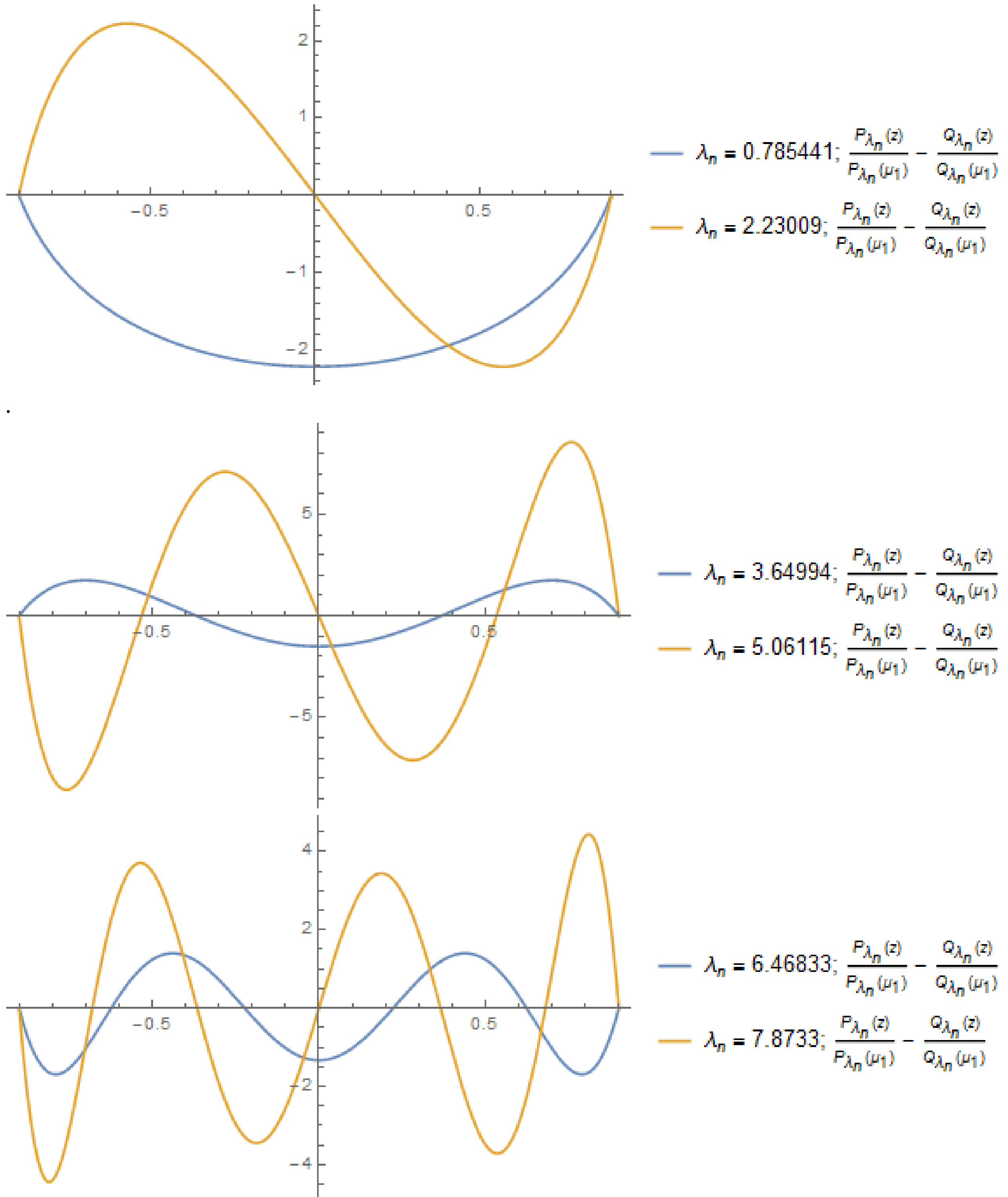
$$\Phi_{\lambda_n}(-z) = -\Phi_{\lambda_n}(z)$$

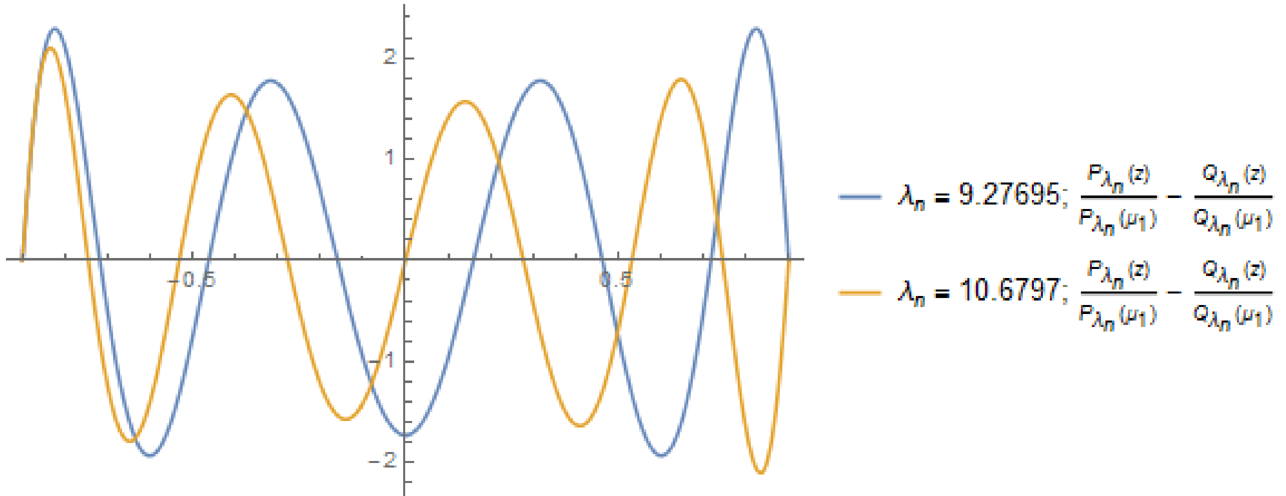
$$Cas \quad \alpha = -1 = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)}$$

$$Fonctions\ propres\ \Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\ paires$$

$$\Phi_{\lambda_n}(-z) = \Phi_{\lambda_n}(z)$$

Illustrons ce résultat par le graphe des 8 premières fonctions propres du problème de Dirichlet homogène aux angles $\theta_1 = \pi / 7 \quad \theta_2 = 6\,\pi / 7$:





Démontrons la propriétés de parité des fonctions propres, et raisonnons avec les fonctions propres de la forme :

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

Les calculs seraient identiques avec les fonctions propres de la forme :

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(-\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(-\mu_2)}.$$

Premier cas α=1

On applique successivement les formules de liaison sur les fonctions de Legendre, les combinaisons paires ou impaires et les valeurs extrêmes, et cela donne :

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{-2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)} \frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi) + Q_{\lambda_n}(-z)}{\frac{-2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)} Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)} - \frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)} \frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi) - P_{\lambda_n}(-z)}{\frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)} P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi) + Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)} - \frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi) - P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{Q_{\lambda_n}(z)(Cos(\lambda_n\pi)+1) - Q_{\lambda_n}(z) + Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)} - \frac{P_{\lambda_n}(z)(Cos(\lambda_n\pi)-1) + P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)} + \frac{-Q_{\lambda_n}(z) + Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)} - \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = -\Phi_{\lambda_n}(z) - \frac{Q_{\lambda_n}(z) - Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)} - \frac{P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = -\frac{P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)} = -\frac{Q_{\lambda_n}(z) - Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)}$$

$\Phi_{\lambda_n}(z)$ *fonction impaire*

Deuxième cas α=-1

On applique également les formules de liaison sur les fonctions de Legendre, les combinaisons paires ou impaires et les valeurs extrêmes, et cela donne :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{-2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)+Q_{\lambda_n}(-z)}{\frac{2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}Q_{\lambda_n}(\mu_2)(1-Cos(\lambda_n\pi))}-\frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)}\frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{\frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)}P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)(Cos(\lambda_n\pi)-1)+Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)(Cos(\lambda_n\pi)+1)-P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)}+\frac{Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=-\Phi_{\lambda_n}(z)+\frac{Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)}+\frac{P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)+1)}=\frac{Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)(Cos(\lambda_n\pi)-1)}$$

$\Phi_{\lambda_n}(z)$ *fonction paire*

La conséquence des propriétés de parité des fonctions propres sur les intégrales utilisées dans le développement en série est immédiate à savoir :

Premier cas $\alpha=1\Rightarrow\Phi_{\lambda_n}(z)$ *fonction impaire*

Condition aux limites paire $f(z)=f(-z)$

$$A_{\lambda_n}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)=0$$

Condition aux limites impaire $f(z)=-f(-z)$

$$A_{\lambda_n}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)=2\int_{0}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)\neq 0$$

Deuxième cas $\alpha=-1\Rightarrow\Phi_{\lambda_n}(z)$ *fonction paire*

Condition aux limites paire $f(z)=f(-z)$

$$A_{\lambda_n}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)=2\int_{0}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)\neq 0$$

Condition aux limites impaire $f(z)=-f(-z)$

$$A_{\lambda_n}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)=0$$

En d'autres termes, lorsque la condition aux limites est paire, alors seules les coefficients des fonctions propres paires donnent un résultat non nul, par construction la solution est donc bien paire. Il en est de même pour la condition aux limites impaire où dans la série seuls les coefficients des fonctions propres impaires sont non nuls, conduisant à une solution impaire.

Caractérisons précisément le système des valeurs et fonctions propres de ce problème aux limites de Dirichlet sur la section sphérique symétrique. En revenant aux propriétés connues d'un système de Sturm-Liouville, l'équation différentielle de la partie angulaire devient ici un système ***régulier de Sturm-Liouville***, et non un système singulier comme avec le cas de la sphère complète :

$p(z)=1-z^2 \Rightarrow p(z)>0 \quad p(-\mu_2)=p(\mu_2)=1-\mu_2^{\,2}$

$w(z)=1$

$q(z)=0$

Dans ces conditions toutes les propriétés d'un système régulier de Sturm-Liouville s'appliquent et notamment :

- il y a une infinité de valeur propres tendant vers l'infini
- comme les conditions homogènes sont de Dirichlet, les valeurs propres sont toutes positives, et de plus il y a un nombre grandissant de zéros des fonctions propres à mesure que les valeurs propres augmentent, en plus des deux zéros fixés aux extrémités par les conditions homogènes de Dirichlet
- on peut fixer la plus petite valeurs propre à la fonction propre ne possédant que les seuls deux zéros des extrémités, par conséquent ne s'annulant pas en zéro, cette fonction propre de valeur propre minimale est nécessairement paire (*α=-1) :* $\Phi_{\lambda_0}(z), \alpha(\lambda_0)=-1$
- concernant les fonctions propres de valeur propre supérieure, prenons la première immédiatement au dessus $\Phi_{\lambda_1}(z) \quad \lambda_1>\lambda_0$, alors d'après les propriétés dîtes d'oscillation, il y a nécessairement au moins un zéro entre les deux zéros $\Phi_{\lambda_0}(z)$. Comme cette fonction ne peut comporter que trois zéros, elle est nécessairement impaire et s'annule donc en zéro : $\Phi_{\lambda_1}(0)=0$ donc $\Phi_{\lambda_1}(z)\ impaire, \alpha(\lambda_1)=1$
- on étend le même raisonnement en appliquant successivement le théorème "d'oscillation", pour conclure que $\Phi_{\lambda_2}(z)\ paire, \alpha(\lambda_2)=-1, 4\ zéros$ puis alternativement pour les fonctions propres :

$\alpha(\lambda_n)=(-1)^{n+1}$

$2\ zéros\ venant\ des\ conditions\ aux\ limites\ \Phi_{\lambda_n}(-\mu_2)=\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)=0$

$\Phi_{\lambda_{2p}}(z)\ paire, 2p+2\ zéros$

$\Phi_{\lambda_{2p+1}}(z)\ impaire, 2p+3\ zéros\ , \Phi_{\lambda_{2p}}(0)=0$

<u>Quelques propriétés des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce pour les degrés λ_n non entiers pour des problèmes aux limites de Neumann</u>

A la manière de l'étude précédente réalisée sur le problème aux limites de Dirichlet pour une configuration symétrique de section sphérique, dégageons quelques propriétés des valeurs et fonction propres pour un problème de Neumann dans une configuration symétrique :

$$\theta_2 = \pi - \theta_1 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1), \mu_1 = -\mu_2$$

$$P_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2) = \frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2} - 1}\left(-\mu_2 P_{\lambda_n}(-\mu_2) - P_{\lambda_n - 1}(-\mu_2)\right) \quad P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) = \frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2} - 1}\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2) = \frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2} - 1}\left(-\mu_2 Q_{\lambda_n}(-\mu_2) - Q_{\lambda_n - 1}(-\mu_2)\right) \quad Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) = \frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2} - 1}\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)$$

$$soit\ \lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0 \quad ou \quad \frac{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2)} \quad ou \quad \frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(-\mu_2) + P_{\lambda_n - 1}(-\mu_2)\right)} = \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(-\mu_2) + Q_{\lambda_n - 1}(-\mu_2)\right)}$$

$$Posons\ le\ choix\ des\ fonctions\ propres\ suivantes\ \Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)}$$

Voici quelques propriétés de liaison des dérivées premières des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce pour les indices λ_n non entiers.

$$P_{\lambda_n}'(z) = -\frac{2}{\pi\ Sin(\lambda_n \pi)}\left(Cos(\lambda_n \pi) Q_{\lambda_n}'(z) - Q_{\lambda_n}'(-z)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(z) = \frac{\pi}{2 Sin(\lambda_n \pi)}\left(Cos(\lambda_n \pi) P_{\lambda_n}'(z) + P_{\lambda_n}'(-z)\right).$$

Formons les combinaisons linéaires paires et impaires des dérivées premières des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce, il vient :

$$P_{\lambda_n}'(z) + P_{\lambda_n}'(-z) = -\frac{2\left(Cos(\lambda_n \pi) - 1\right)}{\pi\ Sin(\lambda_n \pi)}\left(Q_{\lambda_n}'(z) + Q_{\lambda_n}'(-z)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(z) + Q_{\lambda_n}'(-z) = \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n \pi) + 1\right)}{2 Sin(\lambda_n \pi)}\left(P_{\lambda_n}'(z) + P_{\lambda_n}'(-z)\right)$$

De même :

$$P_{\lambda_n}'(z) - P_{\lambda_n}'(-z) = -\frac{2\left(Cos(\lambda_n \pi) + 1\right)}{\pi\ Sin(\lambda_n \pi)}\left(Q_{\lambda_n}'(z) - Q_{\lambda_n}'(-z)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(z) - Q_{\lambda_n}'(-z) = \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n \pi) - 1\right)}{2 Sin(\lambda_n \pi)}\left(P_{\lambda_n}'(z) - P_{\lambda_n}'(-z)\right)$$

Donnons quelques propriétés des valeurs propres et des fonctions propres dans le cas $\vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$, $\mu_1 = -\mu_2$:

$$\theta_2 = \pi - \theta_1 \Rightarrow \mu_1 = Cos(\theta_2); \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad \mu_1 = -\mu_2$$

$$\Rightarrow \lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)} \quad ou \quad \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)}.$$

Ce qui donne :

$$Posons\ \alpha = \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)}$$

$$\alpha = \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \frac{\left(Cos(\lambda_n\pi)P_{\lambda_n}'(\mu_2) + P_{\lambda_n}'(-\mu_2)\right)}{\left(Cos(\lambda_n\pi)P_{\lambda_n}'(-\mu_2) + P_{\lambda_n}'(\mu_2)\right)} = \frac{\left(\alpha\, Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}{\left(Cos(\lambda_n\pi)+\alpha\right)} \Rightarrow \alpha = \frac{\left(\alpha\, Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}{\left(Cos(\lambda_n\pi)+\alpha\right)} \Rightarrow \alpha^2 = 1$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)}\right)^2 = \left(\frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)}\right)^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \pm 1$$

Il apparait donc deux cas de figure selon les valeurs propres: le cas de valeurs identiques ou opposées aux extrémités :

$$Cas \quad \alpha = 1 = \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)} \Rightarrow valeurs\ identiques\ des\ dérivées\ aux\ extrémités$$

$$Cas \quad \alpha = -1 = \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)} \Rightarrow valeurs\ opposées\ des\ dérivées\ aux\ extrémités$$

En appliquant cette dernière propriété remarquable des fonctions propres aux limites du domaine, en la combinant avec les formules de liaisons entre fonctions de première et deuxième espèce, il vient pour le cas α=1 :

$$Cas \quad \alpha = \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = 1 \Rightarrow valeurs\ identiques\ aux\ extrémités$$

$$P_{\lambda_n}'(\mu_2) = -\frac{2\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)} Q_{\lambda_n}'(\mu_2)$$

$$Q_{\lambda_n}'(\mu_2) = \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}{2Sin(\lambda_n\pi)} P_{\lambda_n}'(\mu_2)$$

Et pour le cas α=-1 :

$$Cas \quad \alpha = \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = -1 \Rightarrow valeurs\ opposées\ aux\ extrémités$$

$$P_{\lambda_n}'(\mu_2) = -\frac{2\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)} Q_{\lambda_n}'(\mu_2)$$

$$Q_{\lambda_n}'(\mu_2) = \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}{2Sin(\lambda_n\pi)} P_{\lambda_n}'(\mu_2)$$

.

De ces diverses formules on peut tirer une propriété remarquable des fonctions propres à savoir :

$$Cas \quad \alpha = 1 = \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)}$$

$$Fonctions\ propres\ \Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\ paires$$

$$\Phi_{\lambda_n}(-z) = \Phi_{\lambda_n}(z)$$

$$Cas \quad \alpha = -1 = \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)} = \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)}$$

$$Fonctions\ propres\ \Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\ impaires$$

$$\Phi_{\lambda_n}(-z) = -\Phi_{\lambda_n}(z)$$

Démontrons la propriétés de parité des fonctions propres, et raisonnons avec les fonctions propres de la forme : $\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}$. Les calculs seraient identiques avec les fonctions propres de la forme : $\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(-\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)}$.

Premier cas α=1

On applique successivement les formules de liaison sur les fonctions de Legendre, les combinaisons paires ou impaires et les valeurs extrêmes des dérivées premières, et cela donne :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{-2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)+Q_{\lambda_n}(-z)}{\frac{-2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}-\frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)}\frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{\frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)}P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)+Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)-P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}+\frac{Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}+\frac{P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=-\Phi_{\lambda_n}(z)+\frac{Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}+\frac{P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}=\frac{Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}$$

$\Phi_{\lambda_n}(z)$ *fonction paire*

Deuxième cas α=-1

On applique également les formules de liaison sur les fonctions de Legendre, les combinaisons paires ou impaires et les valeurs extrêmes des dérivées premières, et cela donne :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{-2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)+Q_{\lambda_n}(-z)}{-\frac{2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}-\frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)}\frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{\frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)}P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)-Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)+P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)-Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=-\Phi_{\lambda_n}(z)-\frac{Q_{\lambda_n}(z)-Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=-\frac{P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}=-\frac{Q_{\lambda_n}(z)-Q_{\lambda_n}(-z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}$$

$\Phi_{\lambda_n}(z)$ *fonction impaire*

La conséquence des propriétés de parité des fonctions propres sur les intégrales utilisées dans le développement en série est immédiate, à savoir :

Premier cas $\alpha=1\Rightarrow\Phi_{\lambda_n}(z)$ *fonction paire*

Condition aux limites paire $f(z)=f(-z)$ *Condition aux limites impaire* $f(z)=-f(-z)$

$$A_{\lambda_n}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\; f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)=2\int_{0}^{\mu_2}dz\; f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)\neq 0 \qquad A_{\lambda_n}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\; f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)=0$$

Deuxième cas $\alpha=-1\Rightarrow\Phi_{\lambda_n}(z)$ *fonction impaire*

Condition aux limites paire $f(z)=f(-z)$ *Condition aux limites impaire* $f(z)=-f(-z)$

$$A_{\lambda_n}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\; f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)=0 \qquad A_{\lambda_n}=\int_{-\mu_2}^{\mu_2}dz\; f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)=2\int_{0}^{\mu_2}dz\; f(z)\Phi_{\lambda_n}(z)\neq 0$$

En d'autres termes, lorsque la condition aux limites est paire, alors seules les coefficients des fonctions propres paires donnent un résultat non nul, par construction la solution est donc bien paire. Il en est de même pour la condition aux limites impaire où dans la série seuls les coefficients des fonctions propres impaires sont non nuls, conduisant à une solution impaire.

Caractérisons précisément le système des valeurs et fonctions propres de ce problème aux limites de Neumann sur la section sphérique symétrique. En revenant aux propriétés connues d'un système de Sturm-Liouville, l'équation différentielle de la partie angulaire devient ici un système ***<u>régulier de Sturm-Liouville</u>*** :

$p(z)=1-z^2 \Rightarrow p(z)>0 \quad p(-\mu_2)=p(\mu_2)=1-\mu_2{}^2$

$w(z)=1$

$q(z)=0$

Dans ces conditions toutes les propriétés d'un système régulier de Sturm-Liouville s'appliquent et notamment :

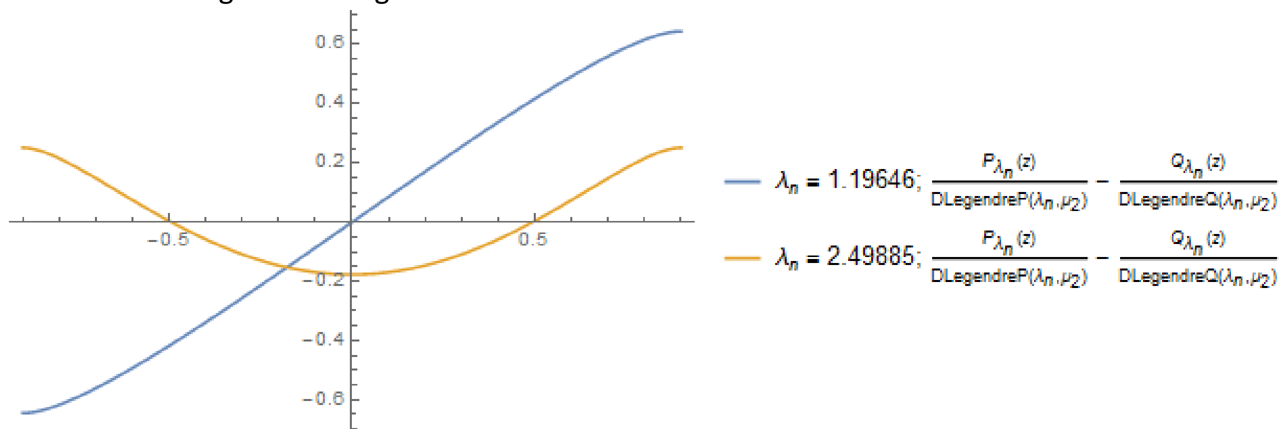
- il y a une infinité de valeur propres tendant vers l'infini
- comme les conditions homogènes sont de Neumann, les valeurs propres sont toutes positives, et de plus il y a un nombre grandissant de zéros des fonctions propres à mesure que les valeurs propres augmentent, en plus des deux zéros fixés aux extrémités par les conditions homogènes de Dirichlet
- on peut fixer la plus petite valeurs propre à la fonction propre ne possédant qu'un seul zéros à la valeur z=0, par conséquent cette fonction propre de valeur propre minimale est nécessairement impaire (*α=-1) car elle s'annule en z=0 :* $\Phi_{\lambda_0}(z), \Phi_{\lambda_0}(0)=0, \alpha(\lambda_0)=-1$
- concernant les fonctions propres de valeur propre supérieure, prenons la première immédiatement au dessus $\Phi_{\lambda_1}(z) \quad \lambda_1>\lambda_0$, alors d'après les propriétés dîtes d'oscillation, il y a nécessairement au moins un zéro avant z=0 et un autre également après . Comme cette fonction ne peut comporter que deux zéros, elle est nécessairement paire et ne s'annule pas en zéro : $\Phi_{\lambda_1}(0)\neq 0$ donc $\Phi_{\lambda_1}(z)\ paire, \alpha(\lambda_1)=1$
- on étend le même raisonnement en appliquant successivement le théorème "d'oscillation", pour conclure que $\Phi_{\lambda_2}(z)\ impaire, \Phi_{\lambda_2}(0)=0, \alpha(\lambda_2)=-1, 3\ zéros$ puis alternativement pour les fonctions propres :

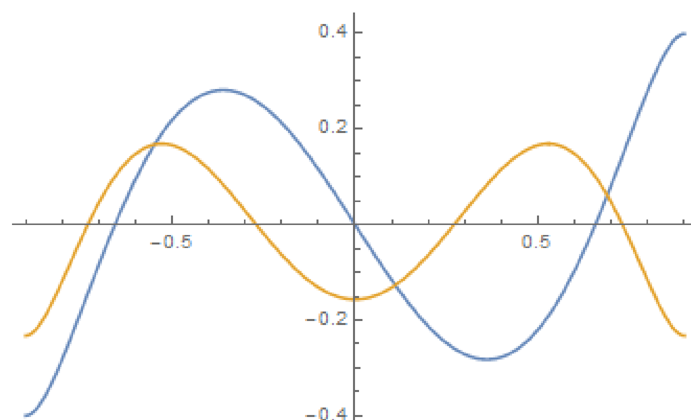
$\alpha(\lambda_n)=(-1)^{n-1} \quad Les\ pentes\ aux\ extrémités\ sont\ nulles\ voir\ C.L.\ \Phi_{\lambda_n}'(-\mu_2)=\Phi_{\lambda_n}'(\mu_2)=0$

$\Phi_{\lambda_{2p}}(z)\ impaire, 2p+1\ zéros\ , \Phi_{\lambda_{2p}}(0)=0$.

$\Phi_{\lambda_{2p+1}}(z)\ paire, 2p+2\ zéros$

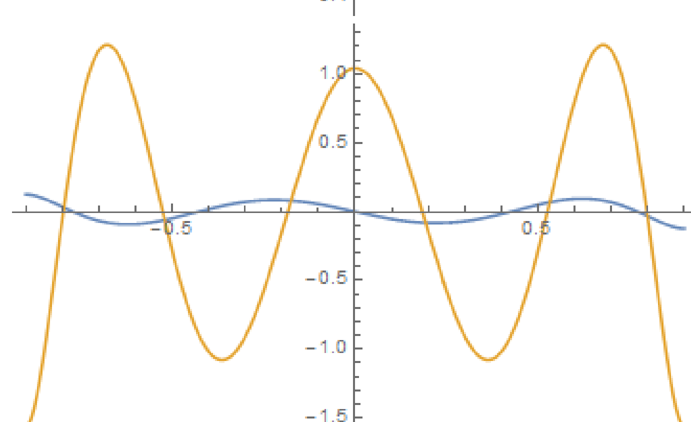
Illustrons ces résultats par les graphes des 8 premières fonctions propres du problème de Neumann homogène aux angles $\theta_1=\pi/7 \quad \theta_2=6\pi/7$:





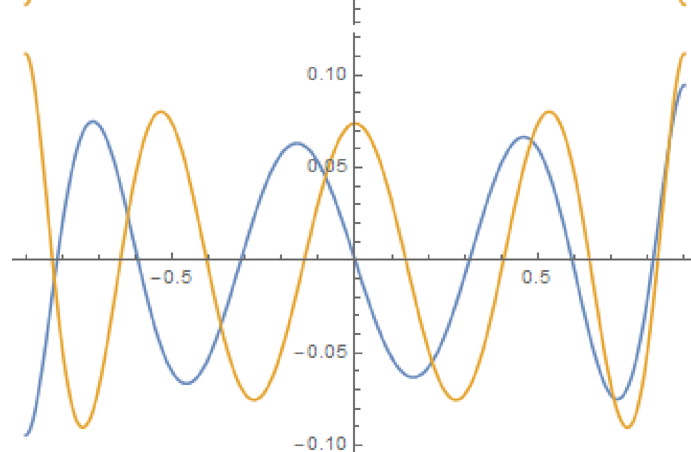
$\lambda_n = 3.8465;\ \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$

$\lambda_n = 5.21496;\ \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$



$\lambda_n = 6.59421;\ \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$

$\lambda_n = 7.97964;\ \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$



$\lambda_n = 9.36888;\ \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$

$\lambda_n = 10.7606;\ \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$

Quelques propriétés des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce pour les degrés λ_n non entiers pour des problèmes aux limites « mixtes » de Robin dans le cas d'un problème entièrement symétrique

On rappelle que les problèmes aux limites homogènes angulaires de ce type n'ont pas exactement cette forme, car les conditions aux limites mixtes de type Robin présentent en théorie une dépendance radiale. Mais en première approximation ou bien encore de manière tout à fait théorique, on peut se pencher sur ce genre de problème avec des paramètres indépendant des variables du système de coordonnées .

Soit les fonctions propres du problème $\Phi_{\lambda_n}(z)=\dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$

Avec les propriétés suivantes sur les valeurs propres et sur les coefficients des conditions aux limites symétriques :

$$\frac{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}=\frac{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1\Phi'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)=0\\ \alpha_2\Phi'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)=0\end{cases}$$

$$\textit{Symétrie}\quad \alpha=\alpha_1=\alpha_2\quad et\quad \beta=\beta_1=\beta_2\quad et\quad \mu_1=-\mu_2$$

$$\lambda_n\ tq\quad \frac{\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha P'_{\lambda_n}(-\mu_2)-\beta P_{\lambda_n}(-\mu_2)}=\frac{\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha Q'_{\lambda_n}(-\mu_2)-\beta Q_{\lambda_n}(-\mu_2)}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\Phi'_{\lambda_n}(-\mu_2)-\beta\Phi_{\lambda_n}(-\mu_2)=0\\ \alpha\Phi'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)=0\end{cases}$$

Le choix des fonctions propres devient donc :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

Rappelons quelques propriétés supplémentaires sur des combinaisons linéaires des fonctions de Legendre :

$$P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)=-\frac{2(Cos(\lambda_n\pi)+1)}{\pi\,Sin(\lambda_n\pi)}\left(Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)\right)\quad Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)=\frac{\pi(Cos(\lambda_n\pi)-1)}{2Sin(\lambda_n\pi)}\left(P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)\right)$$

$$P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)=-\frac{2(Cos(\lambda_n\pi)-1)}{\pi\,Sin(\lambda_n\pi)}\left(Q_{\lambda_n}(z)-Q_{\lambda_n}(-z)\right)\quad Q_{\lambda_n}(z)-Q_{\lambda_n}(-z)=\frac{\pi(Cos(\lambda_n\pi)+1)}{2Sin(\lambda_n\pi)}\left(P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)\right)$$

$$P_{\lambda_n}'(z)+P_{\lambda_n}'(-z)=-\frac{2(Cos(\lambda_n\pi)-1)}{\pi\,Sin(\lambda_n\pi)}\left(Q_{\lambda_n}'(z)+Q_{\lambda_n}'(-z)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(z)+Q_{\lambda_n}'(-z)=\frac{\pi(Cos(\lambda_n\pi)+1)}{2Sin(\lambda_n\pi)}\left(P_{\lambda_n}'(z)+P_{\lambda_n}'(-z)\right)$$

$$P_{\lambda_n}'(z)-P_{\lambda_n}'(-z)=-\frac{2(Cos(\lambda_n\pi)+1)}{\pi\,Sin(\lambda_n\pi)}\left(Q_{\lambda_n}'(z)-Q_{\lambda_n}'(-z)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(z)-Q_{\lambda_n}'(-z)=\frac{\pi(Cos(\lambda_n\pi)-1)}{2Sin(\lambda_n\pi)}\left(P_{\lambda_n}'(z)-P_{\lambda_n}'(-z)\right)\Rightarrow$$

$$\alpha\left(P_{\lambda_n}'(z)+P_{\lambda_n}'(-z)\right)+\beta\left(P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)\right)=-\frac{2(Cos(\lambda_n\pi)-1)}{\pi\,Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha\left(Q_{\lambda_n}'(z)+Q_{\lambda_n}'(-z)\right)+\beta\left(Q_{\lambda_n}(z)-Q_{\lambda_n}(-z)\right)\right)$$

$$\alpha\left(P_{\lambda_n}'(z)-P_{\lambda_n}'(-z)\right)+\beta\left(P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)\right)=-\frac{2(Cos(\lambda_n\pi)+1)}{\pi\,Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha\left(Q_{\lambda_n}'(z)-Q_{\lambda_n}'(-z)\right)+\beta\left(Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)\right)\right)$$

$$\alpha\left(Q_{\lambda_n}'(z)+Q_{\lambda_n}'(-z)\right)+\beta\left(Q_{\lambda_n}(z)-Q_{\lambda_n}(-z)\right)=\frac{\pi(Cos(\lambda_n\pi)+1)}{2\,Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha\left(P_{\lambda_n}'(z)+P_{\lambda_n}'(-z)\right)+\beta\left(P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)\right)\right)$$

$$\alpha\left(Q_{\lambda_n}'(z)-Q_{\lambda_n}'(-z)\right)+\beta\left(Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)\right)=\frac{\pi(Cos(\lambda_n\pi)-1)}{2\,Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha\left(P_{\lambda_n}'(z)-P_{\lambda_n}'(-z)\right)+\beta\left(P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)\right)\right)$$

Et les propriétés de liaisons :

$$P_{\lambda_n}(z) = -\frac{2}{\pi\, Sin(\lambda_n \pi)}\left(Cos(\lambda_n \pi) Q_{\lambda_n}(z) + Q_{\lambda_n}(-z)\right) \quad Q_{\lambda_n}(z) = \frac{\pi}{2Sin(\lambda_n \pi)}\left(Cos(\lambda_n \pi) P_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n}(-z)\right)$$

$$P_{\lambda_n}'(z) = -\frac{2}{\pi\, Sin(\lambda_n \pi)}\left(Cos(\lambda_n \pi) Q_{\lambda_n}'(z) - Q_{\lambda_n}'(-z)\right) \quad Q_{\lambda_n}'(z) = \frac{\pi}{2Sin(\lambda_n \pi)}\left(Cos(\lambda_n \pi) P_{\lambda_n}'(z) + P_{\lambda_n}'(-z)\right)$$

.

$$\Theta = \frac{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, P_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)}$$

$$\Theta = \frac{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha\left(Cos(\lambda_n \pi) P_{\lambda_n}'(\mu_2) + P_{\lambda_n}'(-\mu_2)\right) + \beta\left(Cos(\lambda_n \pi) P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n}(-\mu_2)\right)}{\alpha\left(Cos(\lambda_n \pi) P_{\lambda_n}'(-\mu_2) + P_{\lambda_n}'(\mu_2)\right) - \beta\left(Cos(\lambda_n \pi) P_{\lambda_n}(-\mu_2) - P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}$$

$$\Theta = \frac{Cos(\lambda_n \pi)\left(\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)\right) + \left(\alpha\, P_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)\right)}{Cos(\lambda_n \pi)\left(\alpha\, P_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)\right) + \left(\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)} = \frac{Cos(\lambda_n \pi)\Theta + 1}{Cos(\lambda_n \pi) + \Theta}$$

$$\Rightarrow \Theta^2 = 1 \quad \frac{\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, P_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \pm 1$$

Il apparait donc deux cas de figure selon les valeurs propres: le cas de valeurs identiques ou opposées aux extrémités :

$$Cas \quad \Theta = 1 = \frac{\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, P_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} \Rightarrow valeurs\ identiques\ aux\ extrémités$$

$$Cas \quad \Theta = -1 = \frac{\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, P_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} \Rightarrow valeurs\ opposées\ aux\ extrémités$$

En appliquant cette dernière propriété remarquable des fonctions propres aux limites du domaine, en la combinant avec les formules de liaisons entre fonctions de première et deuxième espèce, il vient pour le cas Θ=1 :

$$Cas \quad \Theta = 1 = \frac{\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, P_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} \Rightarrow valeurs\ identiques\ aux\ extrémités$$

$$\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2) = \alpha\, P_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)$$

$$\alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2) = \alpha\, Q_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, Q_{\lambda_n}(-\mu_2)$$

$$\alpha\left(P_{\lambda_n}'(\mu_2) + P_{\lambda_n}'(-\mu_2)\right) + \beta\left(P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n}(-\mu_2)\right) =$$

$$= -\frac{2\left(Cos(\lambda_n \pi) - 1\right)}{\pi\, Sin(\lambda_n \pi)}\left(\alpha\left(Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)\right) + \beta\left(Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n}(-\mu_2)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2) = -\frac{2\left(Cos(\lambda_n \pi) - 1\right)}{\pi\, Sin(\lambda_n \pi)}\left(\alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)$$

$$\alpha\left(Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)\right) + \beta\left(Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n}(-\mu_2)\right) =$$

$$= \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n \pi) + 1\right)}{2\, Sin(\lambda_n \pi)}\left(\alpha\left(P_{\lambda_n}'(\mu_2) + P_{\lambda_n}'(-\mu_2)\right) + \beta\left(P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n}(-\mu_2)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2) = \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n \pi) + 1\right)}{2\, Sin(\lambda_n \pi)}\left(\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)$$

.

Et pour le cas Θ=-1 :

$$Cas \quad \Theta = -1 = \frac{\alpha P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha P_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2) - \beta P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2) - \beta Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} \Rightarrow valeurs\ impaires\ aux\ extrémités$$

$$\alpha P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta P_{\lambda_n}(\mu_2) = -\left(\alpha P_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2) - \beta P_{\lambda_n}(-\mu_2)\right)$$

$$\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta Q_{\lambda_n}(\mu_2) = -\left(\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2) - \beta Q_{\lambda_n}(-\mu_2)\right)$$

$$\alpha\left(P_{\lambda_n}'(\mu_2) - P_{\lambda_n}'(-\mu_2)\right) + \beta\left(P_{\lambda_n}(\mu_2) + P_{\lambda_n}(-\mu_2)\right) =$$

$$= -\frac{2\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha\left(Q_{\lambda_n}'(\mu_2) - Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)\right) + \beta\left(Q_{\lambda_n}(\mu_2) + Q_{\lambda_n}(-\mu_2)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \alpha P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta P_{\lambda_n}(\mu_2) = -\frac{2\left(Cos(\lambda_n\pi)+1\right)}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)$$

$$\alpha\left(Q_{\lambda_n}'(\mu_2) - Q_{\lambda_n}'(-\mu_2)\right) + \beta\left(Q_{\lambda_n}(\mu_2) + Q_{\lambda_n}(-\mu_2)\right) =$$

$$= \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}{2\, Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha\left(P_{\lambda_n}'(\mu_2) - P_{\lambda_n}'(-\mu_2)\right) + \beta\left(P_{\lambda_n}(\mu_2) + P_{\lambda_n}(-\mu_2)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \alpha Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta Q_{\lambda_n}(\mu_2) = \frac{\pi\left(Cos(\lambda_n\pi)-1\right)}{2\, Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)$$

De ces diverses formules on peut tirer une propriété remarquable des fonctions propres à savoir :

$$Cas \quad \Theta = 1 = \frac{\alpha P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha P_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2) - \beta P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2) - \beta Q_{\lambda_n}(-\mu_2)}$$

$$Fonctions\ propres\ \Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\ paires$$

$$\Phi_{\lambda_n}(-z) = \Phi_{\lambda_n}(z)$$

$$Cas \quad \Theta = -1 = \frac{\alpha P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha P_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2) - \beta P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2) - \beta Q_{\lambda_n}(-\mu_2)}$$

$$Fonctions\ propres\ \Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\ impaires$$

$$\Phi_{\lambda_n}(-z) = -\Phi_{\lambda_n}(z)$$

Démontrons la propriétés de parité des fonctions propres, et raisonnons avec les fonctions propres de la forme : $\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2) + \beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$.

Premier cas Θ=1

On applique successivement les formules de liaison sur les fonctions de Legendre et les valeurs extrêmes sur l'intervalle, et cela donne :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)+Q_{\lambda_n}(-z)}{\frac{2(Cos(\lambda_n\pi)-1)}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}-\frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)}\frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{\frac{\pi(Cos(\lambda_n\pi)+1)}{2\,Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)+Q_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)-1)\left(\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)+1)\left(\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)(Cos(\lambda_n\pi)-1)+Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)-1)\left(\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)(Cos(\lambda_n\pi)+1)-P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)+1)\left(\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=-\Phi_{\lambda_n}(z)+\frac{Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)-1)\left(\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}+\frac{P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)+1)\left(\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)-1)\left(\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}+\frac{P_{\lambda_n}(z)+P_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)+1)\left(\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\right)$$

$\Phi_{\lambda_n}(z)$ *fonction paire*

Deuxième cas Θ=-1

On applique également les formules de liaison sur les fonctions de Legendre et les valeurs extrêmes des dérivées premières, et cela donne :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)+Q_{\lambda_n}(-z)}{\frac{2(Cos(\lambda_n\pi)+1)}{\pi\, Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}-\\ -\frac{\pi}{2Sin(\lambda_n\pi)}\frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{\frac{\pi(Cos(\lambda_n\pi)-1)}{2\,Sin(\lambda_n\pi)}\left(\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\end{array}\right\}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)+Q_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)+1)\left(\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)Cos(\lambda_n\pi)-P_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)-1)\left(\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{Q_{\lambda_n}(z)(Cos(\lambda_n\pi)+1)-Q_{\lambda_n}(z)+Q_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)+1)\left(\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)(Cos(\lambda_n\pi)-1)+P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)-1)\left(\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=-\Phi_{\lambda_n}(z)-\frac{Q_{\lambda_n}(z)-Q_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)+1)\left(\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}-\frac{P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)-1)\left(\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=-\frac{1}{2}\left(\frac{P_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)-1)\left(\alpha P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}+\frac{Q_{\lambda_n}(z)-Q_{\lambda_n}(-z)}{(Cos(\lambda_n\pi)+1)\left(\alpha Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\right)$$

$\Phi_{\lambda_n}(z)$ *fonction impaire*

.

La conséquence des propriétés de parité des fonctions propres sur les intégrales utilisées dans le développement en série est immédiate, à savoir :

$Premier\ cas\ \Theta = 1 \Rightarrow \Phi_{\lambda_n}(z)\ fonction\ paire$

$Condition\ aux\ limites\ paire\ f(z) = f(-z)$ $\quad$ $Condition\ aux\ limites\ impaire\ f(z) = -f(-z)$

$$A_{\lambda_n} = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z) = 2\int_0^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z) \neq 0 \quad A_{\lambda_n} = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z) = 0$$

$Deuxième\ cas\ \Theta = -1 \Rightarrow \Phi_{\lambda_n}(z)\ fonction\ impaire$

$Condition\ aux\ limites\ paire\ f(z) = f(-z)$ $\quad$ $Condition\ aux\ limites\ impaire\ f(z) = -f(-z)$

$$A_{\lambda_n} = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z) = 0 \qquad A_{\lambda_n} = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z) = 2\int_0^{\mu_2} dz\ f(z)\Phi_{\lambda_n}(z) \neq 0$$

En d'autres termes, lorsque la condition aux limites est paire, alors seules les coefficients des fonctions propres paires donnent un résultat non nul, par construction la solution est donc bien paire. Il en est de même pour la condition aux limites impaire où dans la série seuls les coefficients des fonctions propres impaires sont non nuls, conduisant à une solution impaire.

En revenant aux propriétés connues d'un système de Sturm-Liouville, l'équation différentielle de la partie angulaire devient ici un système ***<u>régulier de Sturm-Liouville</u>***,

$p(z) = 1 - z^2 \Rightarrow p(z) > 0 \quad p(-\mu_2) = p(\mu_2) = 1 - \mu_2{}^2$

$w(z) = 1$

$q(z) = 0$

Dans ces conditions toutes les propriétés d'un système régulier de Sturm-Liouville s'appliquent et notamment :

- il y a une infinité de valeur propres tendant vers l'infini
- comme les conditions homogènes sont de Robin, et que les paramètres des conditions aux limites mixtes sont ainsi : $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha > 0\,; \beta_2 = \beta > 0\,; \beta_1 = -\beta \Rightarrow \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} > 0\ et\ \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} < 0 \Rightarrow \lambda_n > 0$,

les valeurs propres sont toutes positives, et de plus il y a un nombre grandissant de zéros des fonctions propres à mesure que les valeurs propres augmentent, en plus des deux zéros fixés aux extrémités par les conditions homogènes de Dirichlet

- on peut fixer la plus petite valeur propre à la fonction propre ne possédant aucun zéro , par conséquent cette fonction propre de valeur propre minimale est nécessairement paire (*Θ=1) car elle s'annule en z=0 :* $\Phi_{\lambda_0}(z), \Phi_{\lambda_0}(0) = 0, \Theta(\lambda_0) = 1$
- concernant les fonctions propres de valeur propre supérieure, prenons la première immédiatement au dessus $\Phi_{\lambda_1}(z) \quad \lambda_1 > \lambda_0$, alors d'après les propriétés dîtes d'oscillation, il y a nécessairement au moins un zéro . Comme cette fonction ne peut comporter qu'un seul zéro, elle est nécessairement impaire et s'annule en zéro : $\Phi_{\lambda_1}(0) = 0$ donc $\Phi_{\lambda_1}(z)\ impaire, \Theta(\lambda_1) = -1$
- on étend le même raisonnement en appliquant successivement le théorème "d'oscillation", pour conclure que $\Phi_{\lambda_2}(z)\ paire, \Phi_{\lambda_2}(0) \neq 0, \alpha(\lambda_2) = 2\ zéros$ puis alternativement pour les fonctions

$$\Theta(\lambda_n) = (-1)^n \quad C.L.\ \alpha\,\Phi_{\lambda_n}{}'(-\mu_2) - \beta\,\Phi_{\lambda_n}(-\mu_2) = \alpha\,\Phi_{\lambda_n}{}'(\mu_2) + \beta\,\Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0$$

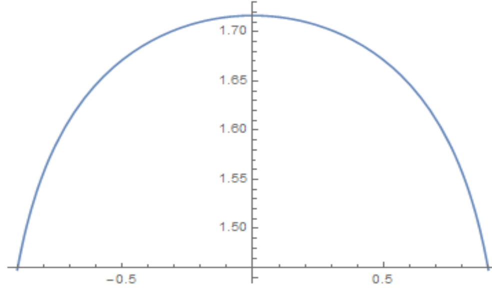
propres : $\Phi_{\lambda_{2p}}(z)\ paire, 2p\ zéros\ , \Phi_{\lambda_{2p}}(0) \neq 0$

$\Phi_{\lambda_{2p+1}}(z)\ impaire, 2p+1\ zéros \quad \Phi_{\lambda_{2p+1}}(0) = 0$

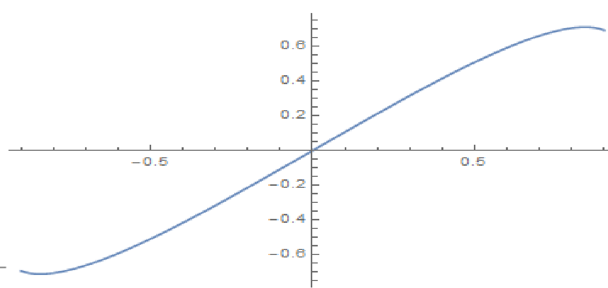
Illustrons ces résultats par les graphes des 10 premières fonctions propres du problème de Robin homogène aux valeurs d'angles et de paramètres de conditions aux limites :

$\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = 6\pi/7 \quad \alpha = 1/2 \quad \beta = 1/2$ dont voici les trente premières valeurs propres : 0.158808,1.32868,2.5988,3.92371,5.27689,6.64555,8.02332,9.40682,10.7941,12.1841,13.576,14.9692,16.3636,17.7588,19.1547,20.5511,21.9479,23.3451,24.7427,26.1404,27.5384,28.9366,30.335,31.7335,33.1321,34.5308,35.9296,37.3285,38.7275,40.1266 :

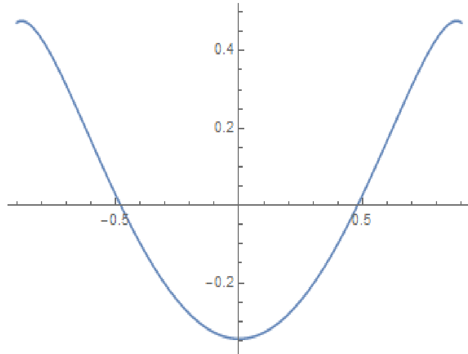
λ_0=0.158808



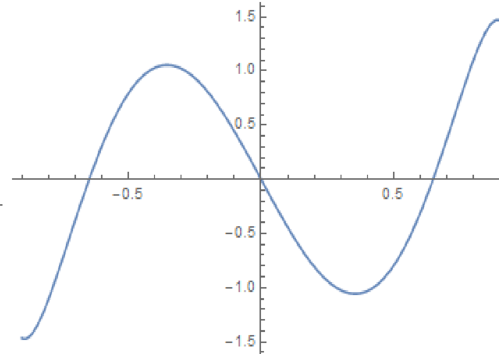
λ_0= 1.32868



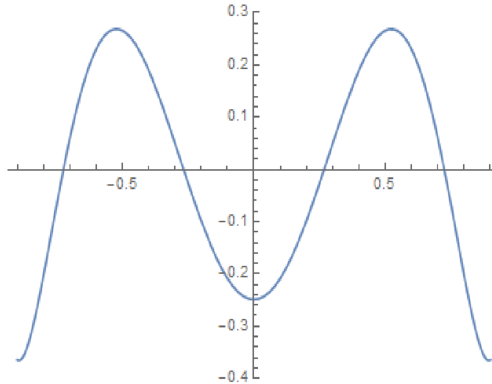
λ_0= 2.5988

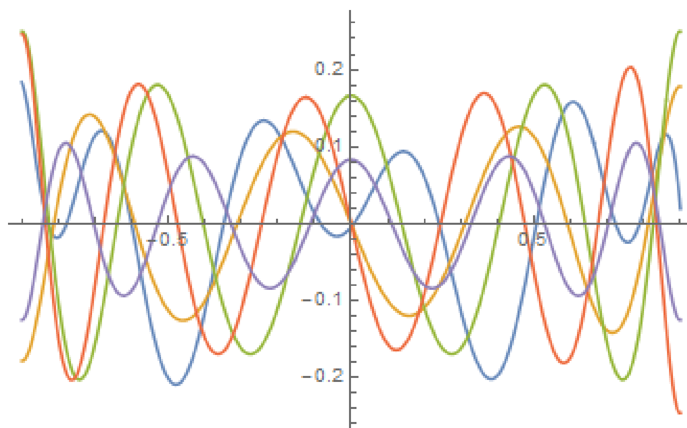


λ_0= 3.92371



λ_0= 5.27689





$\lambda_n = 6.64555; \ \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \frac{\text{MyLegendreQ}(\lambda_n,z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$

$\lambda_n = 9.40682; \ \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \frac{\text{MyLegendreQ}(\lambda_n,z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$

$\lambda_n = 10.7941; \ \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \frac{\text{MyLegendreQ}(\lambda_n,z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$

$\lambda_n = 12.1841; \ \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \frac{\text{MyLegendreQ}(\lambda_n,z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$

$\lambda_n = 13.576; \ \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\text{DLegendreP}(\lambda_n,\mu_2)} - \frac{\text{MyLegendreQ}(\lambda_n,z)}{\text{DLegendreQ}(\lambda_n,\mu_2)}$

Calcul de la norme des fonctions propres du problème aux limites de Dirichlet

Pour le calcul de la norme des fonctions propres on remarque que les formules concernant la dérivée première en z des fonctions de Legendre de deuxième espèces est identique, à savoir :

$$\frac{\partial Q_\nu(z)}{\partial z} = \frac{\nu}{z^2-1}\left(zQ_\nu(z) - Q_{\nu-1}(z)\right) \quad \forall \nu > 0 \in \Re \; ou \; \mathbf{N}$$

$$\frac{\partial Q_\nu^\mu(z)}{\partial z} = \frac{1}{z^2-1}\left(z\nu\, Q_\nu^\mu(z) - (\nu+\mu)Q_{\nu-1}^\mu(z)\right) \quad \forall \nu > 0 \in \Re \; ou \; \mathbf{N}$$

Le résultat obtenu précédemment avec les seules fonctions de première espèce est donc applicable aux fonction de Legendre de deuxième espèce (théoriquement calculable):

$$\left\|Q_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, Q_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\left[Q_{\lambda_n}(z)\left(z\, Q_{\lambda_n}(z) - Q_{\lambda_n-1}(z)\right) + \lambda_n\left(Q_{\lambda_n-1}(z)\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - Q_{\lambda_n}(z)\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(z)}{\partial \lambda}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{(2\lambda_n+1)}$$

Et ce qui est vrai pour les fonctions de Legendre de première et deuxième espèces, l'est également pour toute combinaison linéaire : $\Phi_{\lambda_n}(z) = aP_{\lambda_n}(z) + bQ_{\lambda_n}(z)$ *:*

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, \Phi_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\left[\Phi_{\lambda_n}(z)\left(z\, \Phi_{\lambda_n}(z) - \Phi_{\lambda_n-1}(z)\right) + \lambda_n\left(\Phi_{\lambda_n-1}(z)\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \Phi_{\lambda_n}(z)\frac{\partial \Phi_{\lambda_n-1}(z)}{\partial \lambda}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{(2\lambda_n+1)}$$

On peut également opter pour une évaluation numérique directe des normes des fonctions propres. En effet les formules de calcul des dérivées paramétriques (en λ) des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce ont la désagréable habitude de diverger lorsque les valeurs propres sont d'indice supérieur (soit les grandes valeurs propres). Cela rend totalement inefficace leur utilisation car dans ce cas il faut accumuler un grand nombre de termes dans les séries pour espérer avoir une convergence. On donnera donc également les formules des solutions en gardant la notation littérale sans développement ultérieur

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, \Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

La norme de la fonction propre se calcul avec cette formule établie précédemment :

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \frac{\left[\Phi_{\lambda_n}(z)\left(z\, \Phi_{\lambda_n}(z) - \Phi_{\lambda_n-1}(z)\right) + \lambda_n\left(\Phi_{\lambda_n-1}(z)\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \Phi_{\lambda_n}(z)\frac{\partial \Phi_{\lambda_n-1}(z)}{\partial \lambda}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{(2\lambda_n+1)}$$

$$comme\; \Phi_{\lambda_n}(\mu_1) = \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0 \Rightarrow \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \frac{\lambda_n\left[\Phi_{\lambda_n-1}(z)\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{(2\lambda_n+1)} =$$

$$= \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\left(\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} - \Phi_{\lambda_n-1}(\mu_1)\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right)$$

Partons des fonctions propres et réalisons une dérivation formelle par rapport aux paramètres :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\Rightarrow\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}=\frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-$$

$$-\left[\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)^2}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)^2}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}=\frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]-\frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}=0\qquad\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\neq 0$$

$$\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}=\frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]-\frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right].$$

Avec ce résultat la norme se calcule finalement comme suit :

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\qquad\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)=\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\Rightarrow\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\left[\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right]\left[\begin{array}{l}\frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]-\\-\frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]\end{array}\right]$$

$$On\ note\quad N_n=\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\Rightarrow\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}N_n$$

$$N_n=\left[\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right]\left[\begin{array}{l}\frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]-\\-\frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]\end{array}\right].$$

Pour ce qui est des dérivées premières des fonctions de deuxième espèce du paramètre réel v, les formules sont plus complexes et ont déjà été données auparavant dans le texte:

$$(F1)\quad \frac{\partial Q_\nu(z)}{\partial \nu} = \pi \frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)} Q_\nu(z) - \psi^{(1)}(\nu+1) P_\nu(z) +$$

$$+\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{(k!)^2} \left(\frac{1}{2} Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \psi(k+1) - \psi(\nu+1) \right) \left(\psi(k+\nu+1) - \psi(k-\nu)\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$(F3)\quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial Q_\nu^\mu(z)}{\partial \nu} = \frac{\pi}{2Sin(\pi\ \mu)} e^{i\pi\ \mu} \left(\begin{array}{l} \pi \dfrac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)} P_\nu^\mu(z) - (1-\mu+\nu)_{2m} \left(\pi \dfrac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)} - \psi(1-\mu+\nu) + \psi(1+\mu+\nu) \right) P_\nu^{-\mu}(z) - \\ - \dfrac{(z+1)^{\mu/2}}{(z-1)^{\mu/2}} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} \dfrac{(-\nu)_k (1+\nu)_k}{\Gamma(1-\mu+k)\ k!} \left(\psi(k-\nu) - \psi(k+\nu+1)\right) \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k + \\ + (\nu-\mu+1)_{2\mu} \dfrac{(z-1)^{\mu/2}}{(z+1)^{\mu/2}} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} \dfrac{(-\nu)_k (1+\nu)_k}{\Gamma(1+\mu+k)\ k!} \left(\psi(k-\nu) - \psi(k+\nu+1)\right) \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k \end{array} \right)$$

$$\forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$(F4)\quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial Q_\nu^m(z)}{\partial \nu} = \frac{\pi}{2Sin(\pi\ \mu)} e^{i\pi\ \mu} \left(\begin{array}{l} -(1-\mu+\nu)_{2m} \left(\psi(1+\mu+\nu) - \psi(1-\mu+\nu)\right) P_\nu^{-\mu}(z) + \\ + \dfrac{(z+1)^{\mu/2}}{(z-1)^{\mu/2}} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} \dfrac{1}{\Gamma(k-\mu+1)\ k!} \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k \sum_{j=1}^{j=k} S_k^{(j)} \nu^j \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^r S_k^{(k)} \left(\dfrac{j}{\nu} + \dfrac{r}{\nu+1}\right) (\nu+1)^r - \\ - (\nu-\mu+1)_{2\mu} \dfrac{(z-1)^{\mu/2}}{(z+1)^{\mu/2}} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} \dfrac{1}{\Gamma(k-\mu+1)\ k!} \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k \sum_{j=1}^{j=k} S_k^{(j)} \nu^j \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^r S_k^{(k)} \left(\dfrac{j}{\nu} + \dfrac{r}{\nu+1}\right) (\nu + \end{array} \right.$$

$$\forall \nu > 0 \in \Re \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

où

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\ (\alpha+1)\ \cdots (\alpha+k\text{-}1) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* $\Leftarrow \psi(\alpha) = \dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$\psi^{(1)}(\alpha)$ *dérivée première de la fonction Digamma*

$S_k^{(j)}$ *nombre de Stirling de première espèce*

Si l'on prend une fonction propre de la forme :

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

il vient :

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} -$$

$$-\left[\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)^2} \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)^2} \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} \left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} \right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} = 0 \quad \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} \neq 0$$

$$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} \left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} \right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} \right]$$

Et la norme s'écrit :

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n + 1)} \Phi_{\lambda_n - 1}(\mu_1) \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} \quad \Phi_{\lambda_n - 1}(\mu_1) = \frac{P_{\lambda_n - 1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n - 1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\Rightarrow \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n + 1)} \left[\frac{P_{\lambda_n - 1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n - 1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \right] \left[\begin{array}{l} \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} \left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} \right] - \\ - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} \right] \end{array} \right].$$

Calcul de la norme des fonctions propres du problème aux limites de Neumann

Pour ce calcul, on va momentanément revenir à la formule originale établie pour des fonctions propres sphériques :

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\,\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2 = \frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(z)\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial z \partial \lambda}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{\left(2\lambda_n+1\right)}$$

$$Comme \quad \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\,\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2 = -\frac{\left[\left(1-z^2\right)\Phi_{\lambda_n}(z)\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial z \partial \lambda}\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{\left(2\lambda_n+1\right)}$$

Sachant cela, partons des fonctions propres et réalisons une dérivation formelle par rapport aux paramètres des fonctions propres du problème de Neumann :

$$P_{\lambda_n}'(\mu_1) = \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} \quad Q_{\lambda_n}'(\mu_1) = \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} -$$

$$-\left[\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(P_{\lambda_n}'(\mu_1)\right)^2}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(Q_{\lambda_n}'(\mu_1)\right)^2}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{P_{\lambda_n}'(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}'(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right].$$

On peut aussi développer la dérivée en z des fonctions de Legendre :

$$\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}=\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(zP_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial z\partial\lambda}=\frac{zP_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)}{z^2-1}+\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(z\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(z)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial z\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda_n}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}+\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(z\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(z)}{\partial\lambda}\right)\quad\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial z\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda_n}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial z}+\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(z\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(z)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_1{}^2-1}\left(\mu_1\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\quad\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_2{}^2-1}\left(\mu_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_1{}^2-1}\left(\mu_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\quad\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_2{}^2-1}\left(\mu_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$P_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1{}^2-1}\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)\quad P_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2{}^2-1}\left(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1{}^2-1}\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)\quad Q_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2{}^2-1}\left(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right]-\frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right]$$

Avec ce résultat la norme se calcule finalement comme suit :

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=-\frac{\left(1-\mu_2{}^2\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\dfrac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z\partial\lambda}}{\left(2\lambda_n+1\right)}\quad\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)=\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}$$

$$\Rightarrow\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=-\frac{\left(1-\mu_2{}^2\right)}{\left(2\lambda_n+1\right)}\left[\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right]\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z\partial\lambda}$$

$$On\ note\quad N_n=\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z\partial\lambda}\Rightarrow\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=-\frac{\left(1-\mu_2{}^2\right)}{\left(2\lambda_n+1\right)}N_n$$

.

Si l'on prend une fonction propre de la forme :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}$$

Il vient :

$$P_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z}\quad Q_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z}$$

$$\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\Rightarrow\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}=\frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-$$

$$-\left[\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(P_{\lambda_n}'(\mu_2)\right)^2}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(Q_{\lambda_n}'(\mu_2)\right)^2}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}=\frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}\right]-\frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{P_{\lambda_n}'(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}\right]-\frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{Q_{\lambda_n}'(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=0\quad\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\neq 0$$

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_1^2-1}\left(\mu_1\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\quad\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_2^2-1}\left(\mu_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_1^2-1}\left(\mu_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\quad\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_2^2-1}\left(\mu_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$P_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^2-1}\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)\quad P_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^2-1}\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^2-1}\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)\quad Q_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^2-1}\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}\right]-\frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}\right]$$

Avec ces résultats la norme se calcule finalement comme suit :

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\frac{\left(1-\mu_1^2\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z\partial\lambda}}{(2\lambda_n+1)}\quad\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)=\frac{P_{\lambda_n}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}$$

$$\Rightarrow\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\frac{\left(1-\mu_1^2\right)}{(2\lambda_n+1)}\left[\frac{P_{\lambda_n}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\right]\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z\partial\lambda}$$

.

<u>Calcul de la norme des fonctions propres du problème aux limites de Robin</u>

Les fonctions propres sont de la forme : $\Phi_{\lambda_n}(z)=\dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$

Et le système de fonctions propres et de valeurs propres provient des racines de l'équation transcendantale :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\frac{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}=\frac{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1\Phi'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)=0\\ \alpha_2\Phi'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)=0\end{cases}$$

Partons de l'expression suivante possible pour le calcul des normes :

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2=\frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\dfrac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}\dfrac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial z}-\Phi_{\lambda_n}(z)\dfrac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial z\partial\lambda}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{\left(2\lambda_n+1\right)}$$

Sachant cela, partons également des fonctions propres et réalisons une dérivation formelle par rapport aux paramètres des fonctions propres du problème de Robin:

$$P_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z}\quad Q_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z}\quad \Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}=\frac{1}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{1}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-$$

$$-\left[\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)^2}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)^2}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}=\frac{1}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\alpha_1\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}=\frac{1}{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left[\begin{array}{l}\alpha_1\dfrac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\\ -\dfrac{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(z)-\beta_1 P_{\lambda_n}(z)\right)}{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1\dfrac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\end{array}\right]-$$

$$-\frac{1}{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left[\alpha_1\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(z)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(z)\right)}{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\alpha_1\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}=0\quad \alpha_2\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\neq 0$$

.

Là encore on parvient à une simplification « relative » du calcul de la norme :

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\,\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2 = \frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(z)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial z\partial\lambda}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{\left(2\lambda_n+1\right)}$$

$$\alpha_1\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} = \beta_1\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z\partial\lambda}\right) = \left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z\partial\lambda}\right) = \frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\right) = 0$$

$$\Rightarrow\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\,\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2 = \frac{\left(1-{\mu_2}^2\right)\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z\partial\lambda}\right)}{\left(2\lambda_n+1\right)}.$$

Il suffit de calculer la dérivée seconde à l'aide des expressions suivantes:

$$\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} = \frac{1}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} - \beta_1\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right] -$$
$$- \frac{1}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} - \beta_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{1}{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{P'_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} - \beta_1\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right] -$$
$$- \frac{1}{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{Q'_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} - \beta_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right].$$

soit à l'aide des valeurs des dérivées premières et secondes des fonctions de Legendre:

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{{\mu_1}^2-1}\left(\mu_1\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{{\mu_2}^2-1}\left(\mu_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{{\mu_1}^2-1}\left(\mu_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{{\mu_2}^2-1}\left(\mu_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$P_{\lambda_n}{}'(\mu_1) = \frac{\lambda_n}{{\mu_1}^2-1}\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right) \quad P_{\lambda_n}{}'(\mu_2) = \frac{\lambda_n}{{\mu_2}^2-1}\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}{}'(\mu_1) = \frac{\lambda_n}{{\mu_1}^2-1}\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right) \quad Q_{\lambda_n}{}'(\mu_2) = \frac{\lambda_n}{{\mu_2}^2-1}\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right).$$

La norme devient :

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} = \frac{P'_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q'_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)} \left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)} \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \beta_1 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)} \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \beta_1 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{1}{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)} \left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{P'_{\lambda_n}(\mu_2)}{\left(\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)} \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \beta_1 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)} \left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{Q'_{\lambda_n}(\mu_2)}{\left(\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)} \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \beta_1 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} \right) \right]$$

$$\left\| \Phi_{\lambda_n}(z) \right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz \left(\Phi_{\lambda_n}(z) \right)^2 = \frac{\left(1 - {\mu_2}^2\right) \left(\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) \frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z \partial \lambda} \right)}{\left(2\lambda_n + 1\right)}$$

.

Certes l'expression n'est pas simple !

Imaginons de prendre les fonctions propres sous la forme :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}.$$

Alors on calculerait les dérivées paramétriques comme suit :

$$P_{\lambda_n}{}'(\mu_2)=\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z}\quad Q_{\lambda_n}{}'(\mu_2)=\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z}\quad \Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}=\frac{1}{\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}-\frac{1}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}-$$

$$-\left[\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)^2}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right)-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)^2}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right.\right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}=\frac{1}{\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}-\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \alpha_2\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}=\frac{1}{\left(\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left[\begin{array}{l}\alpha_2\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\\ -\frac{\left(\alpha_1 P_{\lambda_n}^{'}(z)-\beta_1 P_{\lambda_n}(z)\right)}{\left(\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\end{array}\right]-$$

$$-\frac{1}{\left(\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left[\alpha_2\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}-\frac{\left(\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(z)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(z)\right)}{\left(\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \alpha_2\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}=0\qquad \alpha_1\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}-\beta_1\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\neq 0$$

Là encore on parvient à une simplification « relative » du calcul de la norme :

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\,\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2=\frac{\left[\left(1-z^2\right)\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial z}-\Phi_{\lambda_n}(z)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial z\partial\lambda}\right)\right]_{\mu_1}^{\mu_2}}{(2\lambda_n+1)}$$

$$\alpha_2\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=-\beta_2\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z}-\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z\partial\lambda}\right)=\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z}-\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z\partial\lambda}\right)=\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\right)=0$$

$$\Rightarrow\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\,\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2=\frac{\left(\mu_1^{\,2}-1\right)\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z}-\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z\partial\lambda}\right)}{(2\lambda_n+1)}$$

.

Il suffit de calculer la dérivée seconde à l'aide des expressions suivantes:

$$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}=\frac{1}{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}-\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda\partial z}=\frac{1}{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda\partial z}-\frac{P'_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda\partial z}-\frac{Q'_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]$$

soit à l'aide des valeurs des dérivées premières et secondes des fonctions de Legendre:

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2}-1}\left(\mu_1\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\quad \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2}-1}\left(\mu_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2}-1}\left(\mu_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\quad \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2}-1}\left(\mu_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$P_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2}-1}\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)\quad P_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2}-1}\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2}-1}\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)\quad Q_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2}-1}\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

.

La norme devient :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z}=\frac{P'_{\lambda_n}(\mu_1)}{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q'_{\lambda_n}(\mu_1)}{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}=\frac{1}{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}-\frac{P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\left(\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\left(\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda\partial z}=\frac{1}{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda\partial z}-\frac{P'_{\lambda_n}(\mu_1)}{\left(\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda\partial z}-\frac{Q'_{\lambda_n}(\mu_1)}{\left(\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}+\beta_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\,\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2=\frac{\left(\mu_1^{\,2}-1\right)\left(\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z}-\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z\partial\lambda}\right)}{(2\lambda_n+1)}$$

.

Exemple : *Section conique-sphérique pleine entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphériques (r,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en* r=l_r. homogènes en θ_1 *et* θ_2

Soit le problème :

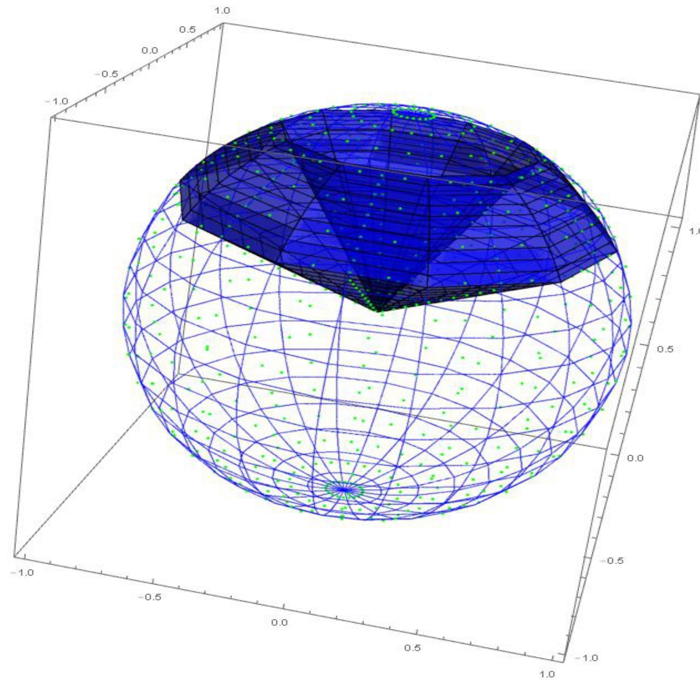
$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$

$$T(r,\theta)\ fini$$



.

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$$T(r,\theta)\ fini$$

$$T(r,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(r,-\theta)=T(r,\theta)$$

$$T(r,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité,\ doit\ être\ continue\ et\ dérivable$$

Pour respecter la condition aux limites

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$

,

on est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier λ_n $P_n(Cos(\theta))\rightarrow P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$ *, ainsi que des fonctions de Legendre de deuxième espèce :* $Q_n(Cos(\theta))\rightarrow Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))$ *.*

En respectant la contrainte de finitude et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme d'une série :

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} r^{\lambda_n}\left(C_n P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) + D_n Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right)$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_2} = 0 \Rightarrow C_n P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2)) + D_n Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2)) = 0 \Rightarrow D_n = -C_n \frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta) \propto \sum_{n\neq 0,+\infty} r^{\lambda_n} C_n \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}\right)$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_1} = 0 \Rightarrow \sum_{n\neq 0,+\infty} r^{\lambda_n} C_n \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}\right) = 0$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))} = \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}$$

$$Comme\ \theta_2 > \theta_1 \Rightarrow Cos(\theta_2) < Cos(\theta_1)$$

$$on\ pose\ \mu_1 = Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2 = Cos(\theta_1)\ de\ telle\ manière\ que\ \mu_1 < \mu_2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(Cos(\theta)) = \frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))} \quad et\ z = Cos(\theta)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right\|^2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\ Sin(\theta)\left(\Phi_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right)^2 = -\int_{\mu_2}^{\mu_1} dz\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2 = \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2$$

<u>Exemple</u>

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = 6\pi/7$*, alors les 10 premières valeurs propres* λ_n = 0.785441, 2.23009, 3.64994, 5.06115, 6.46833, 7.8733, 9.27695, 10.6797, 12.0819, 13.4837

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = 5\pi/14$*, alors les 10 premières valeurs propres* λ_n = 4.1092, 8.80259, 13.4792, 18.1509, 22.8207, 27.4895, 32.1576, 36.8254, 41.493, 46.1603

Les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville s'écrivent donc :

$$\Phi_n(\theta) = \frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}$$

ou

$$\Phi_n(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l_r, donne :

$$\mu_1 = Cos(\theta_2)\,;\ \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad \lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$z = Cos(\theta) \quad \Phi_n(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \qquad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ \Phi_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}$$

$$B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\,P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\,Q_{\lambda_n}(z)$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n}\frac{\left(\dfrac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \dfrac{C_n}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)}{N_n}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

ou bien

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(\dfrac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \dfrac{C_n}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

En prenant en compte les formules d'intégrales indéfinies :

$$(1) \quad \int dz\ P_\nu(z) = \frac{P_{\nu+1}(z) - P_{\nu-1}(z)}{2\nu+1} \qquad \int dz\ Q_\nu(z) = \frac{Q_{\nu+1}(z) - Q_{\nu-1}(z)}{2\nu+1}$$

$$(2) \quad \int dz\ P_\nu(z) = \frac{P_{\nu+1}(z) - zP_\nu(z)}{\nu} \qquad \int dz\ Q_\nu(z) = \frac{Q_{\nu+1}(z) - zQ_\nu(z)}{\nu}$$

$$(3) \quad \int dz\ P_\nu(z) = \frac{zP_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)}{\nu+1} \qquad \int dz\ Q_\nu(z) = \frac{zQ_\nu(z) - Q_{\nu-1}(z)}{\nu+1}$$

$$(4) \quad \int dz\ P_\nu(z) = \frac{(z^2-1)\dfrac{\partial P_\nu(z)}{\partial z}}{\nu(\nu+1)} \qquad \int dz\ Q_\nu(z) = \frac{(z^2-1)\dfrac{\partial Q_\nu(z)}{\partial z}}{\nu(\nu+1)}$$

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)=1$, on a

$$B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ Q_{\lambda_n}(z) \quad N_n = \Phi_{\lambda_n -1}(\mu_2)\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}$$

en utilisant les trois formes des intégrales indéfinies

$$(1) \Rightarrow B_n = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(P_{\lambda_n+1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{(2\lambda_n+1)P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(Q_{\lambda_n+1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{(2\lambda_n+1)Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$B_n' = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(P_{\lambda_n+1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(Q_{\lambda_n+1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0,+\infty} \frac{1}{\lambda_n}\frac{(B_n' - C_n')}{N_n}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

ou bien

$$(2) \Rightarrow B_n = \mu_2\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} + \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \mu_1 \quad et \quad C_n = \mu_2\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} + \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} - \mu_1$$

$$soit\ B_n' = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n^{\ 2}}\frac{(B_n' - C_n')}{N_n}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

ou bien

$$(3) \Rightarrow B_n = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \mu_2\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} + \mu_1 \quad et \quad C_n = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} - \mu_2\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} + \mu_1$$

$$soit\ B_n' = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)}\frac{(B_n' - C_n')}{N_n}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

.

Avec les formes littérales des normes des fonctions propres :

$$\Phi_n(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \qquad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\,\Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

$$(1)\Rightarrow B_n'=\frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)-\left(P_{\lambda_n+1}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n'=\frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)-\left(Q_{\lambda_n+1}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(B_n'-C_n')}{(2\lambda_n+1)\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

ou bien

$$(2)\Rightarrow B_n'=\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n'=\frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{\lambda_n}\frac{(B_n'-C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

ou bien

$$(3)\Rightarrow B_n'=\frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2)-P_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n'=\frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2)-Q_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{(\lambda_n+1)}\frac{(B_n'-C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

Le cas particulier où $\vartheta_2=\pi-\vartheta_1$ entraînant $\mu_1=-\mu_2$. Cela donne une condition aux limites paires et il s'ensuit que la solution du problème aux limites doit également être paire. Plus généralement un problème pour lequel $\vartheta_2=\pi-\vartheta_1$, $\mu_1=-\mu_2$, avec une condition aux limites paire doit normalement conduire à une solution paire :

$$f_\theta(\theta)=f_\theta(\pi-\theta)\Rightarrow T(r,\theta)=T(r,\pi-\theta)$$

avec une condition aux limites impaire doit normalement conduire à une solution impaire :

$$f_\theta(\theta)=-f_\theta(\pi-\theta)\Rightarrow T(r,\theta)=-T(r,\pi-\theta)$$

Exemple *: Section sphérique pleine entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphériques (r,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en* r=l_r. de Neumann homogènes en θ_1 *et* θ_2

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(r,\theta)\Big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))\ avec\ z=Cos(\theta)$$

$$T_z^{'}(r,\theta)\Big|_{\theta=\theta_1}=0$$

$$T_z^{'}(r,\theta)\Big|_{\theta=\theta_2}=0$$

$$T(r,\theta)\ fini$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$$T(r,\theta)\ fini$$

$$T(r,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(r,-\theta)=T(r,\theta)$$

$$T(r,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité, doit\ être\ continue\ et\ dérivable$$

On est amené comme dans l'exemple précédent à rechercher une série comportant les extensions des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce de degré entier à des degrés non entier λ_n*. Soit* $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$, $Q_n(Cos(\theta))\to Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))$ *. En respectant la contrainte de finitude et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme:*

$$T(r,\theta)=B_0+\sum_{n\neq 0,+\infty} r^{\lambda_n}\left(C_nP_{\lambda_n}(Cos(\theta))+D_nQ_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right)\quad Comme\ \theta_2>\theta_1\Rightarrow Cos(\theta_2)<Cos(\theta_1)$$

$$on\ pose\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)\ de\ telle\ manière\ que\ \mu_1<\mu_2$$

$$P_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2}-1}\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)\quad P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2}-1}\left(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2}-1}\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)\quad Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2}-1}\left(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$T_z^{'}(r,z)\Big|_{z=\mu_1}=0\Rightarrow C_n\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2}-1}\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)+D_n\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2}-1}\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)=0$$

$$\Rightarrow D_n=-C_n\frac{\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}\quad T(r,z)\propto\sum_{n\neq 0,+\infty} r^{\lambda_n}C_n\left(\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}\right)$$

$$T(r,\theta)\Big|_{z=\mu_2}=0\Rightarrow\sum_{n\neq 0,+\infty} r^{\lambda_n}C_n\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2}-1}\left(\frac{\left(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}-\frac{\left(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}\right)=0$$

$$soit\ \lambda_n\quad tq\quad \lambda_n=0\quad ou\quad \frac{\left(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}=\frac{\left(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}$$

$$ou\,encore\quad \frac{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}=\frac{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}\quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\,\Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

Exemple

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = \pi/2 - \theta_1 = 5\pi/14$ *, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* 4.33461, 8.92499, 13.5624, 18.2138, 22.8712, 27.5316, 32.1938, 36.8571, 41.5211, 46.1857, 50.8506, 55.5158, 60.1813, 64.8469, 69.5127, 74.1786, 78.8445, 83.5106, 88.1767, 92.8428

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = \pi - \theta_1 = 6\pi/7$ *, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* 1.19646, 2.49885, 3.8465, 5.21496, 6.59421, 7.97964, 9.36888, 10.7606, 12.1541, 13.5489, 14.9445, 16.3409, 17.7378, 19.1352, 20.5328, 21.9308, 23.329, 24.7274, 26.126, 27.5247

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/14 \quad \theta_2 = 3\pi/7$ *, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* 2.60589, 5.30231, 8.04798, 10.8157, 13.5946, 16.3799, 19.1691, 21.9608, 24.7542, 27.5489, 30.3446, 33.1409, 35.9378, 38.7352, 41.5329, 44.3308, 47.129, 49.9274, 52.726, 55.5247

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l$_r$*, donne :*

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_1 = Cos(\theta_2);\ \mu_2 = Cos(\theta_1)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0 \quad ou \quad \frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n -1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n -1}(\mu_1)\right)} = \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n -1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n -1}(\mu_1)\right)} \quad B_0 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, Q_{\lambda_n}(z)$$

$$F_n = \frac{B_n}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{C_n}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\left(1-\mu_2^{\,2}\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\dfrac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z \partial \lambda}}{\left(2\lambda_n + 1\right)} = -\frac{\left(1-\mu_2^{\,2}\right)}{\left(2\lambda_n + 1\right)} N_n \quad \left\|\Phi_0(z)\right\|^2 = \mu_2 - \mu_1$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{\left\|\Phi_0(z)\right\|^2} + \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{F_n \left(\dfrac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} \left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

$$comme\ \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \mu_1\ \Phi_{\lambda_n}(\mu_1) - \Phi_{\lambda_n -1}(\mu_1) = \mu_2\ \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) - \Phi_{\lambda_n -1}(\mu_2) = 0$$

La norme, comme on l'a vu se calcule à partir des données suivantes :

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2} - 1}\left(\mu_1 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n -1}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2} - 1}\left(\mu_2 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n -1}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2} - 1}\left(\mu_1 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_{\lambda_n -1}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2} - 1}\left(\mu_2 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_{\lambda_n -1}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right)$$

$$\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} = P_{\lambda_n}'(\mu_1) = \frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2} - 1}\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n -1}(\mu_1)\right) \quad \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} = P_{\lambda_n}'(\mu_2) = \frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2} - 1}\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n -1}(\mu_2)\right)$$

$$\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} = Q_{\lambda_n}'(\mu_1) = \frac{\lambda_n}{\mu_1^{\,2} - 1}\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n -1}(\mu_1)\right) \quad \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} = Q_{\lambda_n}'(\mu_2) = \frac{\lambda_n}{\mu_2^{\,2} - 1}\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n -1}(\mu_2)\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right]$$

.

Il vient la solution du problème (sans oublier la solution de valeur propre nulle)

$$B_0 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z) P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z) Q_{\lambda_n}(z)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ \Phi_{\lambda_n}(z)^2 \quad F_n = \frac{B_n}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{C_n}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{(\mu_2 - \mu_1)} + \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{F_n \left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n} \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right)} \right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}.$$

En prenant en compte les formules d'intégrales indéfinies :

$$\int dz\ P_\nu(z) = \frac{P_{\nu+1}(z) - P_{\nu-1}(z)}{2\nu + 1} \qquad \int dz\ Q_\nu(z) = \frac{Q_{\nu+1}(z) - Q_{\nu-1}(z)}{2\nu + 1} \quad (1)$$

$$\int dz\ P_\nu(z) = \frac{P_{\nu+1}(z) - zP_\nu(z)}{\nu} \qquad \int dz\ Q_\nu(z) = \frac{Q_{\nu+1}(z) - zQ_\nu(z)}{\nu} \quad (2)$$

$$\int dz\ P_\nu(z) = \frac{zP_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)}{\nu + 1} \qquad \int dz\ Q_\nu(z) = \frac{zQ_\nu(z) - Q_{\nu-1}(z)}{\nu + 1} \quad (3)$$

$$\int dz\ P_\nu(z) = \frac{\left(z^2 - 1\right)\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial z}}{\nu(\nu + 1)} \qquad \int dz\ Q_\nu(z) = \frac{\left(z^2 - 1\right)\frac{\partial Q_\nu(z)}{\partial z}}{\nu(\nu + 1)} \quad (4)$$

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)=1$, on a

$$B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ Q_{\lambda_n}(z)$$

en utilisant les équations (3)

$$\Rightarrow B_n = \frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right) - \left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n + 1} \quad C_n = \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right) - \left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n + 1}$$

$$F_n = \frac{1}{\lambda_n + 1} \left(\frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \right) = 0$$

On retrouve donc la solution triviale, puisque $B_0=\mu_2-\mu_1$: $T(r,\theta)=1$.

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)$ présente un profil en fonction de Heaviside, il vient :

$$f_\theta(z)=1 \quad si\ z\in\left[\mu_1,\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right] \quad f_\theta(z)=0 \quad si\ z\notin\left[\mu_1,\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right]$$

$$B_0=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}dz=\frac{\mu_2-\mu_1}{2} \quad B_n=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}dz\,P_{\lambda_n}(z) \quad C_n=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}dz\,Q_{\lambda_n}(z)$$

en utilisant les équations (3)

$$\Rightarrow B_n=\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)P_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)-P_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)-\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1}$$

$$C_n=\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)Q_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)-Q_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)-\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1}$$

$$F_n=\left(\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)P_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)-P_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)Q_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)-Q_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\,\Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2}+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{F_n\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)}{(\lambda_n+1)\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

Exemple : *Section sphérique pleine entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphériques (r,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en* $r=l_r$. de « Robin » homogènes en θ_1 *et* θ_2

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))\ avec\ z=Cos(\theta)$$

$$\mu_1=Cos(\theta_2) \quad \mu_2=Cos(\theta_1) \quad \begin{cases}\alpha_1\ T_z'(r,z)-\beta_1\ T(r,z)\big|_{z=\mu_1}=0\\ \alpha_2\ T_z'(r,z)+\beta_2\ T(r,z)\big|_{z=\mu_2}=0\end{cases}$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$T(r,\theta)\ fini$

$T(r,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(r,-\theta)=T(r,\theta)$

$T(r,\theta)$ *ne comporte aucune singularité, doit être continue et dérivable*

On est amené comme dans l'exemple précédent à rechercher une série comportant les extensions des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce de degré entier à des degrés non entier λ_n. Soit $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$ *,* $Q_n(Cos(\theta))\to Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))$ *. En respectant la contrainte de finitude et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme:*

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty} r^{\lambda_n}\left(C_nP_{\lambda_n}(Cos(\theta))+D_nQ_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right) \quad \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$

$$P_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right) \quad P_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right) \quad Q_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$\alpha_2\ T_z'(r,z)+\beta_2\ T(r,z)\big|_{z=\mu_2}=0\Rightarrow\alpha_2\left(C_nP_{\lambda_n}'(\mu_2)+D_nQ_{\lambda_n}'(\mu_1)\right)+\beta_2\left(C_nP_{\lambda_n}(\mu_2)+D_nQ_{\lambda_n}(\mu_2)\right)=0$$

$$\Rightarrow D_n=-C_n\frac{\alpha_2P_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_2Q_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \quad T(r,z)\propto\sum_{n\neq 0,+\infty} r^{\lambda_n}C_n\left(\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2P_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2Q_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\right)$$

$$T(r,\theta)\big|_{z=\mu_2}=0\Rightarrow\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n=0 \quad ou \quad \frac{\alpha_2P_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1P_{\lambda_n}'(\mu_1)-\beta_1P_{\lambda_n}(\mu_1)}=\frac{\alpha_2Q_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1Q_{\lambda_n}'(\mu_1)-\beta_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2P_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2Q_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\,\Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

C'est un système ***<u>régulier de Sturm-Liouville</u>***,:

$$p(z)=1-z^2\Rightarrow p(z)>0 \quad p(-\mu_2)=p(\mu_2)=1-\mu_2^{\ 2}$$

$$w(z)=1$$

$$q(z)=0$$

Dans ces conditions toutes les propriétés d'un système régulier de Sturm-Liouville s'appliquent et notamment :

- il y a une infinité de valeur propres tendant vers l'infini
- comme les conditions homogènes sont de Neumann, les valeurs propres sont toutes positives si les deux rapports ont les signes suivant :

$$Si\ \frac{\beta_2}{\alpha_2}>0\ et-\frac{\alpha_1}{\beta_1}<0\Rightarrow\lambda_n>0$$

Ce qui est bien le cas avec tous les paramètres pris pour positif.

On examinera plus particulièrement des catégories de problèmes aux limites entièrement symétrique par rapport au plan hémisphérique, avec une section sphérique elle-même symétriques Soit :

Problèmes aux limites entièrement symétriques

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))\ avec\ z=Cos(\theta)$$

$$\mu_2=Cos(\theta_1) \quad \mu_1=Cos(\pi-\theta_1)=-\mu_2 \quad \begin{cases}\alpha\, T_z^{'}(r,z)-\beta\, T(r,z)\big|_{z=-\mu_2}=0\\ \alpha\, T_z^{'}(r,z)+\beta\, T(r,z)\big|_{z=\mu_2}=0\end{cases}$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n=0 \quad ou \quad \frac{\alpha\, P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, P_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2)-\beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)}=\frac{\alpha\, Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, Q_{\lambda_n}^{'}(-\mu_2)-\beta\, Q_{\lambda_n}(-\mu_2)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha\, P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha\, Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

<u>Exemple:</u> pour un problème entièrement symétrique si l'on prend les valeurs :

$\theta_1=\pi/7\,;\theta_2=\pi-\theta_1=6\pi/7\,;\alpha=1/2\,;\beta=1/2$,

alors on trouve les 30 premières valeurs propres λ_n =
0.158808,1.32868,2.5988,3.92371,5.27689,6.64555,8.02332,9.40682,10.7941,12.1841,13.576,14.9692,16.3636,17.7588,19.1547,20.5511,21.9479,23.3451,24.7427,26.1404,27.5384,28.9366,30.335,31.7335,33.1321,34.5308,35.9296,37.3285,38.7275,40.1266

<u>Exemple:</u> pour un problème entièrement symétrique si l'on prend les valeurs :

$\theta_1=\pi/20\,;\theta_2=\pi-\theta_1=19\pi/20\,;\alpha=1/2\,;\beta=1/2$,

alors on trouve les 30 premières valeurs propres λ_n =
0.0233022,1.04614,2.0884,3.14607,4.21537,5.29336,6.37782,7.46719,8.5603,9.65633,10.7546,11.8548,12.9564,14.0593,15.1631,16.2678,17.3731,18.4791,19.5856,20.6925,21.7998,22.9075,24.0154,25.1236,26.232,27.3406,28.4494,29.5583,30.6674,31.7767

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l_r, donne la forme de la solution:

$$z=Cos(\theta) \quad \mu_1=Cos(\theta_2)\,;\,\mu_2=Cos(\theta_1)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n=0 \quad ou \quad \frac{\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}=\frac{\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\,\left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2=\frac{\left(\mu_1^{\,2}-1\right)\left(\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z}-\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z\partial\lambda}\right)}{\left(2\lambda_n+1\right)} \quad voir\ précédemment$$

$$B_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ f_\theta(z)\,P_{\lambda_n}(z) \quad C_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ f_\theta(z)\,Q_{\lambda_n}(z) \quad F_n=\frac{B_n}{\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{C_n}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{F_n\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\alpha_2 P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

<u>Le résultat important sur la structure des fonctions propres et le développement en série de la solution aux problème mixte de Dirichlet-Robin sur une configuration entièrement symétrique est le suivant</u> :

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha\, P'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha\, Q'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$C.L.\ \ \alpha\, \Phi_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, \Phi_{\lambda_n}(-\mu_2) = \alpha\, \Phi_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0$$

$$\Theta(\lambda_n) = \frac{\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, P_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} = (-1)^n$$

$$\Phi_{\lambda_{2p}}(z)\ paire,\, 2p\ zéros\ ,\Phi_{\lambda_{2p}}(0) \neq 0$$

$$\Phi_{\lambda_{2p+1}}(z)\ impaire,\, 2p+1\ zéros\quad \Phi_{\lambda_{2p+1}}(0) = 0$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\, \Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

$$Cas\ n°1\quad f_\theta(z)\ paire \Rightarrow f_\theta(z) = f_\theta(-z)$$

$$B_n = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z)\quad C_n = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, Q_{\lambda_n}(z)$$

$$F_{2n} = \frac{B_{2n}}{\alpha\, P'_{\lambda_{2n}}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_{2n}}(\mu_2)} - \frac{C_{2n}}{\alpha\, Q'_{\lambda_{2n}}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_{2n}}(\mu_2)} \neq 0$$

$$\frac{B_{2n+1}}{\alpha\, P'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)} = \frac{C_{2n+1}}{\alpha\, Q'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)} \Rightarrow F_{2n+1} = 0$$

.

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} \frac{F_{2n}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_{2n}}\left(\frac{P_{\lambda_{2n}}(Cos(\theta))}{\alpha\, P'_{\lambda_{2n}}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_{2n}}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_{2n}}(Cos(\theta))}{\alpha\, Q'_{\lambda_{2n}}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_{2n}}(\mu_2)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_{2n}}(z)\right\|^2}$$

$$Cas\ n°2\quad f_\theta(z)\ impaire \Rightarrow f_\theta(z) = -f_\theta(-z)$$

$$B_n = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z)\quad C_n = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, Q_{\lambda_n}(z) \Rightarrow B_{2n} = C_{2n}\quad B_{2n+1} = C_{2n+1}$$

$$F_{2n+1} = \frac{B_{2n+1}}{\alpha\, P'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)} - \frac{C_{2n+1}}{\alpha\, Q'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)} \neq 0$$

$$\frac{B_{2n}}{\alpha\, P'_{\lambda_{2n}}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_{2n}}(\mu_2)} = \frac{C_{2n}}{\alpha\, Q'_{\lambda_{2n}}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_{2n}}(\mu_2)} \Rightarrow F_{2n} = 0$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} \frac{F_{2n+1}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{\lambda_{2n+1}}\left(\frac{P_{\lambda_{2n+1}}(Cos(\theta))}{\alpha\, P'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_{2n+1}}(Cos(\theta))}{\alpha\, Q'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_{2n+1}}(z)\right\|^2}$$

Extension aux cas de l'hémisphère porté à la condition de Dirichlet homogène nulle sur la base

Dans la configuration symétrique précédente, lorsque les conditions aux limites sont impaires, la solution est construite à l'aide de seules fonctions impaires, ce qui conduit à ce que la valeur sur la tranche (base) soit exactement nulle. C'est donc également la solution d'un problème aux limites sur une hémisphère évidé par un cône supérieure d'angle θ_1 :

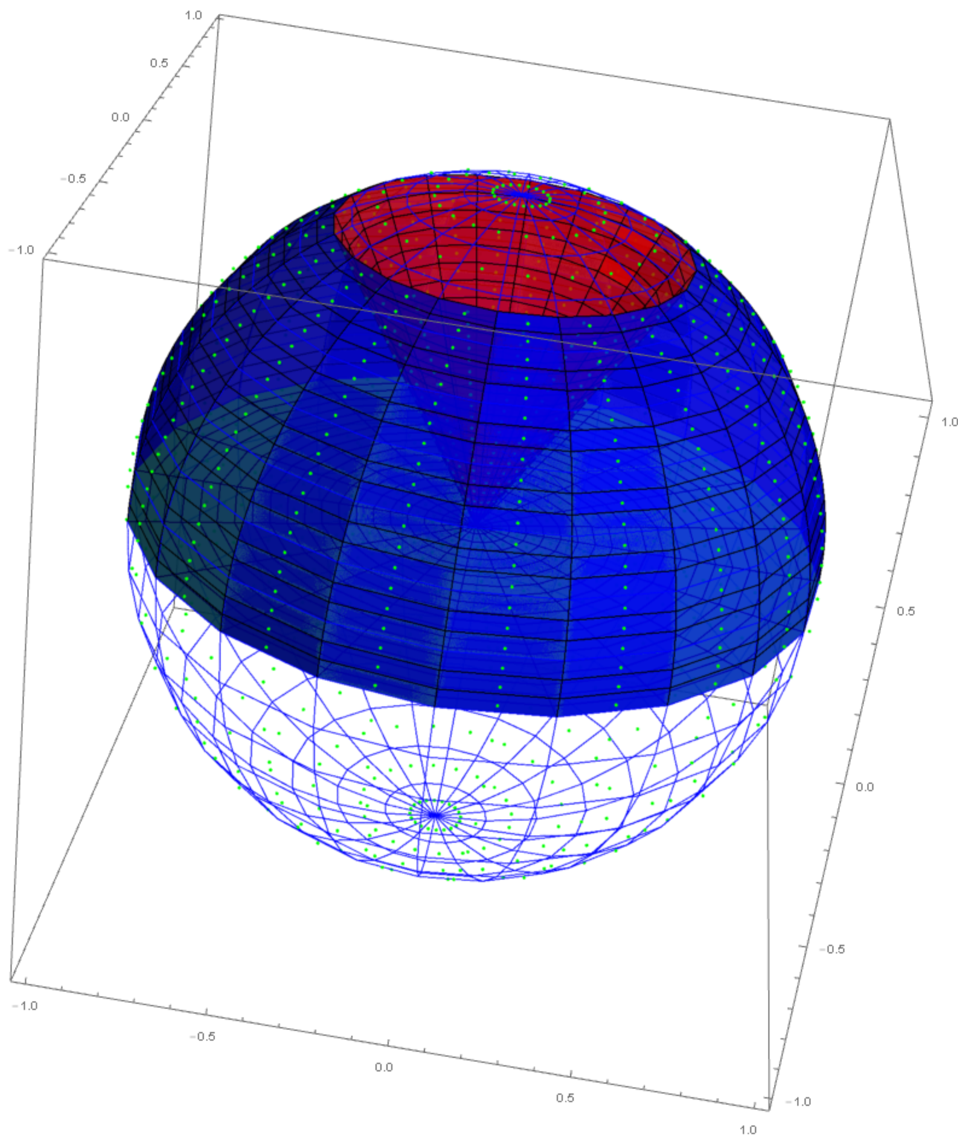
$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini$

$T(r,\theta)\big|_{r=l_r} = f_\theta(Cos(\theta)) = f_z(z)\ avec\ z = Cos(\theta)$

$\mu_2 = Cos(\theta_1)$

$\alpha\, T_z^{'}(r,z)+\beta\, T(r,z)\big|_{\theta=\theta_1, z=\mu_2} = 0$

$T(r,z)\big|_{\theta=\pi/2, z=0} = 0$



Avec pour solution :

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha\, P'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha\, Q'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\alpha\, \Phi_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, \Phi_{\lambda_n}(-\mu_2) = \alpha\, \Phi_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0$$

$$\Theta(\lambda_n) = \frac{\alpha\, P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, P_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, P_{\lambda_n}(-\mu_2)} = \frac{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha\, Q_{\lambda_n}'(-\mu_2) - \beta\, Q_{\lambda_n}(-\mu_2)} = (-1)^n$$

$$\Phi_{\lambda_{2p}}(z)\ paire, 2p\ zéros\ , \Phi_{\lambda_{2p}}(0) \neq 0$$

$$\Phi_{\lambda_{2p+1}}(z)\ impaire, 2p+1\ zéros \quad \Phi_{\lambda_{2p+1}}(0) = 0$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\, \Phi_{\lambda_n}(z)^2 = 2\int_0^{\mu_2} dz\, \Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

$$B_n = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, Q_{\lambda_n}(z) \Rightarrow B_{2n} = C_{2n} \quad B_{2n+1} = C_{2n+1}$$

.

$$F_{2n+1} = \frac{B_{2n+1}}{\alpha\, P'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)} - \frac{C_{2n+1}}{\alpha\, Q'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)} \neq 0$$

$$\frac{B_{2n}}{\alpha\, P'_{\lambda_{2n}}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_{2n}}(\mu_2)} = \frac{C_{2n}}{\alpha\, Q'_{\lambda_{2n}}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_{2n}}(\mu_2)} \Rightarrow F_{2n} = 0$$

$$Comme\ F_{2n+1} \neq 0 \quad et \quad \Phi_{\lambda_{2p+1}}(z)\ impaire$$

$$Alors\ B_{2n+1} = 2\int_0^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, P_{\lambda_{2n+1}}(z) \quad C_{2n+1} = 2\int_0^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, Q_{\lambda_{2n+1}}(z)$$

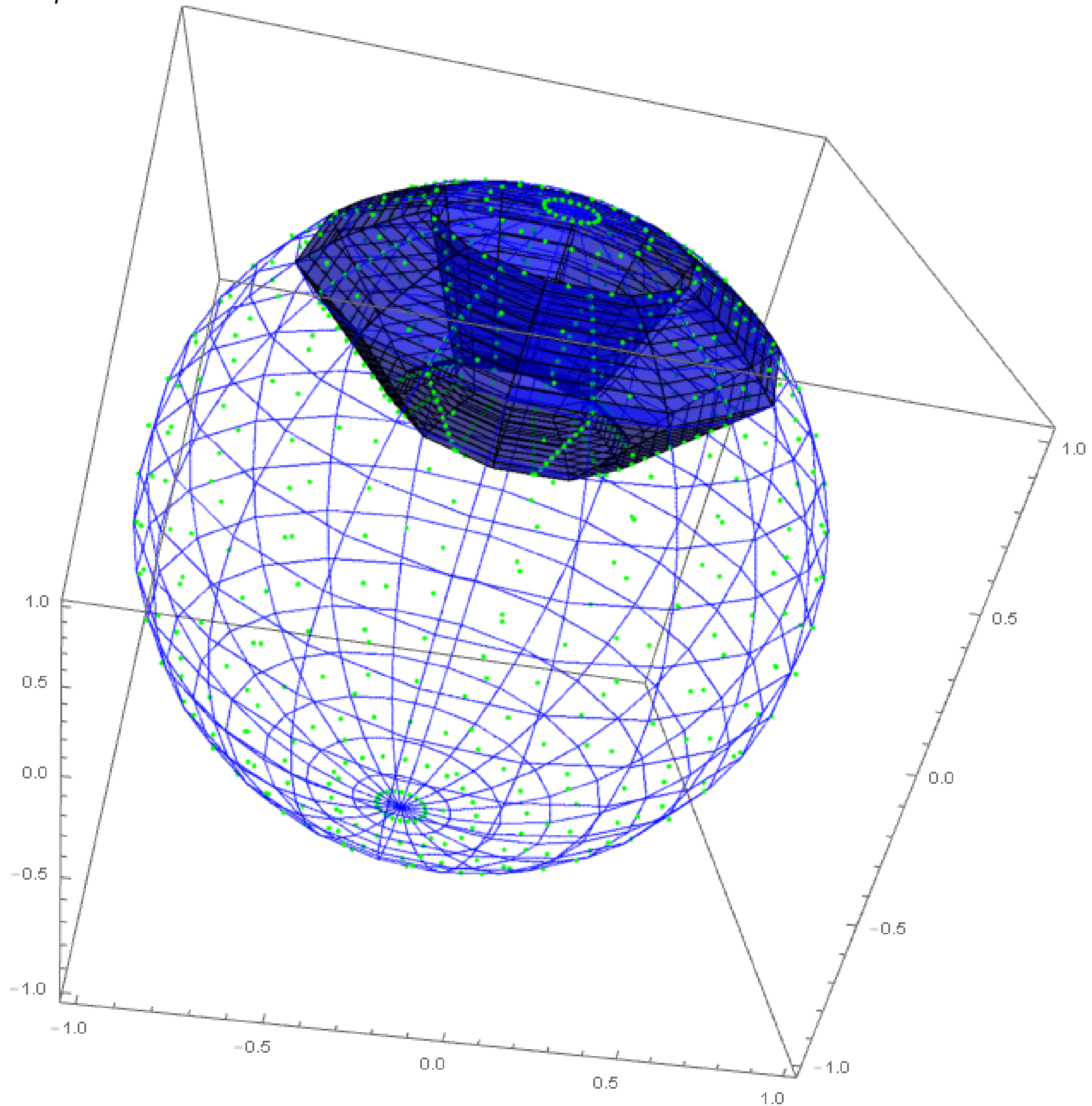
$$F_{2n+1} = \frac{B_{2n+1}}{\alpha\, P'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)} - \frac{C_{2n+1}}{\alpha\, Q'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)} \neq 0$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} \frac{F_{2n+1}\left(\dfrac{r}{l_r}\right)^{\lambda_{2n+1}} \left(\dfrac{P_{\lambda_{2n+1}}(Cos(\theta))}{\alpha\, P'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, P_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)} - \dfrac{Q_{\lambda_{2n+1}}(Cos(\theta))}{\alpha\, Q'_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2) + \beta\, Q_{\lambda_{2n+1}}(\mu_2)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_{2n+1}}(z)\right\|^2}$$

Exemple : *Section sphérique creuse d'angle θ_1,θ_2, en coordonnées sphériques (r,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en* $r=l_{r1}$ et *inhomogènes en* $r=l_{r2}$, homogènes en θ_1 *et* θ_2.

Soit le problème :

$$\begin{aligned}
&\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \\
&T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(Cos(\theta)) \\
&T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0
\end{aligned}$$



En reprenant les résultats d'un exemple précédent, nous avons :

$$\mu_1 = Cos(\theta_2)\,;\ \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad \lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad z = Cos(\theta) \quad \Phi_n(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, Q_{\lambda_n}(z) \quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ \Phi_{\lambda_n}(z)^2 = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}$$

$$= \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)} N_n \Leftrightarrow N_n = \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n}\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2$$

$$N_n = \left[\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right]\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \dfrac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right] - \\ -\dfrac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\dfrac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\dfrac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right] \end{array}\right]$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n}\frac{\left(\dfrac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \dfrac{C_n}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)}{N_n}\frac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

$$ou\,bien\ T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(\dfrac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \dfrac{C_n}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

.

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)=1$, on a :

En utilisant les trois formes des intégrales indéfinies

$$N_n = \left[\frac{P_{\lambda_n -1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n -1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right]\left[\begin{array}{l}\frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right] - \\ -\frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]\end{array}\right]$$

$$(1) \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n +1}(\mu_2) - P_{\lambda_n -1}(\mu_2) - \left(P_{\lambda_n +1}(\mu_1) - P_{\lambda_n -1}(\mu_1)\right)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n +1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n -1}(\mu_2) - \left(Q_{\lambda_n +1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n -1}(\mu_1)\right)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{\lambda_n}\frac{(B_n' - C_n')}{N_n}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n +1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n +1}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

$$(2)\, ou\ bien \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n -1}(\mu_1) - P_{\lambda_n -1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n -1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n -1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n +1)}{\lambda_n^{\ 2}}\frac{(B_n' - C_n')}{N_n}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n +1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n +1}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

$$(3)\, ou\ bien \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n +1}(\mu_2) - P_{\lambda_n +1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n +1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n +1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n +1)}{\lambda_n(\lambda_n +1)}\frac{(B_n' - C_n')}{N_n}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n +1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n +1}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

avec les expressions formelles des normes des fonctions propres :

En utilisant les trois formes des intégrales indéfinies

$$(1)\Rightarrow B_n'=\frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)-\left(P_{\lambda_n+1}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\quad et\quad C_n'=\frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)-\left(Q_{\lambda_n+1}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{(2\lambda_n+1)}\frac{(B_n'-C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

$$(2)\,ou\ bien\Rightarrow B_n'=\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\quad et\quad C_n'=\frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{\lambda_n}\frac{(B_n'-C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

$$(3)\,ou\ bien\Rightarrow B_n'=\frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2)-P_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\quad et\quad C_n'=\frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2)-Q_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{(\lambda_n+1)}\frac{(B_n'-C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

Exemple : *Section sphérique creuse d'angle θ_1,θ_2, en coordonnées sphériques (r,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en* $r=l_{r1}$ et *inhomogènes en* $r=l_{r2}$, Neumann homogènes en θ_1 *et* θ_2

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T_z'(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0 \quad T_z'(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$

En suivant les résultats d'un exemple précédent, il vient :

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=-\frac{\left(1-\mu_2{}^2\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\dfrac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z\partial\lambda}}{\left(2\lambda_n+1\right)}$$

$$B_0=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ f_\theta(z)P_{\lambda_n}(z) \quad C_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ f_\theta(z)Q_{\lambda_n}(z) \quad F_n=\frac{B_n}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{C_n}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{(\mu_2-\mu_1)}\frac{\left(1-\dfrac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(1-\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)}+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{F_n\dfrac{\left(\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\dfrac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n}-\left(\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)}\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\dfrac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)=1$, on a

$$B_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ P_{\lambda_n}(z) \quad C_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ Q_{\lambda_n}(z)$$

en utilisant les équations (3)

$$\Rightarrow B_n=\frac{\left(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)-\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1} \quad C_n=\frac{\left(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)-\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1}$$

$$F_n=\frac{1}{\lambda_n+1}\left(\frac{\left(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{\left(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)=0$$

On retrouve bien la solution triviale, puisque $B_0=\mu_2-\mu_1$:

$$T(r,\theta)=\frac{\left(1-\dfrac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(1-\dfrac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)}$$

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)$ présente un profil en fonction de Heaviside, il vient :

$$f_\theta(z) = 1 \quad si\ z \in \left[\mu_1, \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right] \quad f_\theta(z) = 0 \quad si\ z \notin \left[\mu_1, \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right]$$

Il vient

$$F_n = \left(\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) P_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) - P_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{P'_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) Q_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) - Q_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{Q'_{\lambda_n}(\mu_1)} \right)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P'_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q'_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad voir\ précédemment\ pour\ \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2}\frac{\left(1-\frac{l_{r1}}{r}\right)}{\left(1-\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\lambda_n^{\ 2}}{(\lambda_n+1)(\mu_1^{\ 2}-1)^2} \frac{F_n \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P'_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q'_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

.

Exemple : *Section sphérique creuse entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphériques (r,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en* $r=l_{r1}$ et *inhomogènes en* $r=l_{r2}$ et Robin homogènes en θ_1 *et* θ_2

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$T(r,\theta)\Big|_{r=l_{r1}}=0$$

$$T(r,\theta)\Big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(Cos(\theta))\ avec\ z=Cos(\theta)$$

$$\alpha_1\,T_z'(r,\theta)-\beta_1\,T(r,\theta)\Big|_{\theta=\theta_1}=0$$

$$\alpha_2\,T_z'(r,\theta)+\beta_2\,T(r,\theta)\Big|_{\theta=\theta_2}=0$$

On peut aussi écrire les conditions aux limites sous la forme

$$\mu_1=Cos(\theta_2)\quad \mu_2=Cos(\theta_1)$$

$$\alpha_1\,T_z'(r,z)-\beta_1\,T(r,z)\Big|_{z=\mu_1}=0$$

$$\alpha_2\,T_z'(r,z)+\beta_2\,T(r,z)\Big|_{z=\mu_2}=0$$

$$\alpha_1>0,\alpha_2>0,\beta_1>0,\beta_2>0$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$$T(r,\theta)\ fini$$

$$T(r,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(r,-\theta)=T(r,\theta)$$

$$T(r,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularit\acute{e}, doit\ \hat{e}tre\ continue\ et\ d\acute{e}rivable$$

On est amené comme dans l'exemple précédent à rechercher une série comportant les extensions des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce de degré entier à des degrés non entier λ_n. Soit $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$ *,* $Q_n(Cos(\theta))\to Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))$ *.*

L'équation transcendantale des valeurs propres et les fonctions propres s'écrivent (voir le problème avec la section sphériques pleine :

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n=0 \quad ou \quad \frac{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1)-\beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}=\frac{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1)-\beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2)+\beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l$_r$, donne la forme de la solution:

$z = Cos(\theta) \quad \mu_1 = Cos(\theta_2)\,;\, \mu_2 = Cos(\theta_1)$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0 \quad ou \quad \frac{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q'_{\lambda_n}(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz \left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2 = \frac{\left(\mu_1{}^2 - 1\right)\left(\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z \partial \lambda}\right)}{\left(2\lambda_n + 1\right)}$$

$$B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, f_\theta(z)\, Q_{\lambda_n}(z) \quad F_n = \frac{B_n}{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{C_n}{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{F_n \frac{\left(\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{\lambda_n+1}\right)}{\left(\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{\lambda_n+1}\right)} \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\alpha_2 P'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\alpha_2 Q'_{\lambda_n}(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

.

Tableau synoptique des normes des fonctions propres angulaires d'un problème aux limites sur une section sphériques
Formules communes pour le calcul des normes

$$\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial z} = \frac{\lambda}{z^2-1}\left(zP_\lambda(z) - P_{\lambda-1}(z)\right) \quad \frac{\partial Q_\lambda(z)}{\partial z} = \frac{\lambda}{z^2-1}\left(zQ_\lambda(z) - Q_{\lambda-1}(z)\right) \quad \forall \lambda > 0 \in \Re \; ou \; \mathbf{N}$$

$$\frac{\partial^2 P_\lambda(z)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial z} + \frac{\lambda}{z^2-1}\left(z\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial\lambda} - \frac{\partial P_{\lambda-1}(z)}{\partial\lambda}\right) \quad \forall \lambda > 0 \in \Re \; ou \; \mathbf{N}$$

$$\frac{\partial^2 Q_\lambda(z)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial Q_\lambda(z)}{\partial z} + \frac{\lambda}{z^2-1}\left(z\frac{\partial Q_\lambda(z)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{\lambda-1}(z)}{\partial\lambda}\right) \quad \forall \lambda > 0 \in \Re \; ou \; \mathbf{N}$$

$$\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial\lambda} = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\lambda)_k(\lambda+1)_k}{(k!)^2}\left(\psi(k+\lambda+1) - \psi(\lambda-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\forall \lambda > 0 \in \Re, \lambda \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$\frac{\partial Q_\lambda(z)}{\partial\lambda} = \pi\frac{Cos(\pi\lambda)}{Sin(\pi\lambda)}Q_\lambda(z) - \psi^{(1)}(\lambda+1)P_\lambda(z) +$$

$$+\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\lambda)_k(\lambda+1)_k}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \psi(k+1) - \psi(\lambda+1)\right)\left(\psi(k+\lambda+1) - \psi(k-\lambda)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\forall \lambda > 0 \in \Re, \lambda \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

où

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* $\Leftarrow \psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$\psi^{(1)}(\alpha)$ *dérivée première de la fonction Digamma*

.

Tableau synoptique des normes des fonctions propres angulaires d'un problème aux limites sur une section sphériques

Expression des normes

Problèmes aux limites	Système de valeurs propres, équation transcendantale : λ_n	Système de Fonctions propres angulaires $\Phi_{\lambda_n}(z)$	Normes des fonctions propres angulaire $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz \left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2$
Dirichlet sur un cône d'angle d'ouverture θ0 : $\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad z = Cos(\theta)$	$P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = P_{\lambda_n}(z)$ $\Phi_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$	$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)} P_{\lambda_n-1}(\mu_0) \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}$
Neumann sur un cône d'angle d'ouverture θ0 : $\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial z} = 0$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = P_{\lambda_n}(z)$ $\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial z} = 0$	$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \frac{\left(1-\mu_0^2\right) P_{\lambda_n}(\mu_0) \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda\, \partial z}}{(2\lambda_n+1)}$
Dirichlet sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$ $\Phi_{\lambda_n}(\mu_1) = \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0$	$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right]$ $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)} \Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2) \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}$
Dirichlet sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$ $\Phi_{\lambda_n}(\mu_1) = \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0$	$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)} \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right]$ $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)} \Phi_{\lambda_n-1}(\mu_1) \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}$
Neumann sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z}{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z} = \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z}{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z}$ $\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right] -$ $-\frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right]$ $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\left(1-\mu_2^2\right) \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) \frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z \partial \lambda}}{(2\lambda_n+1)}$

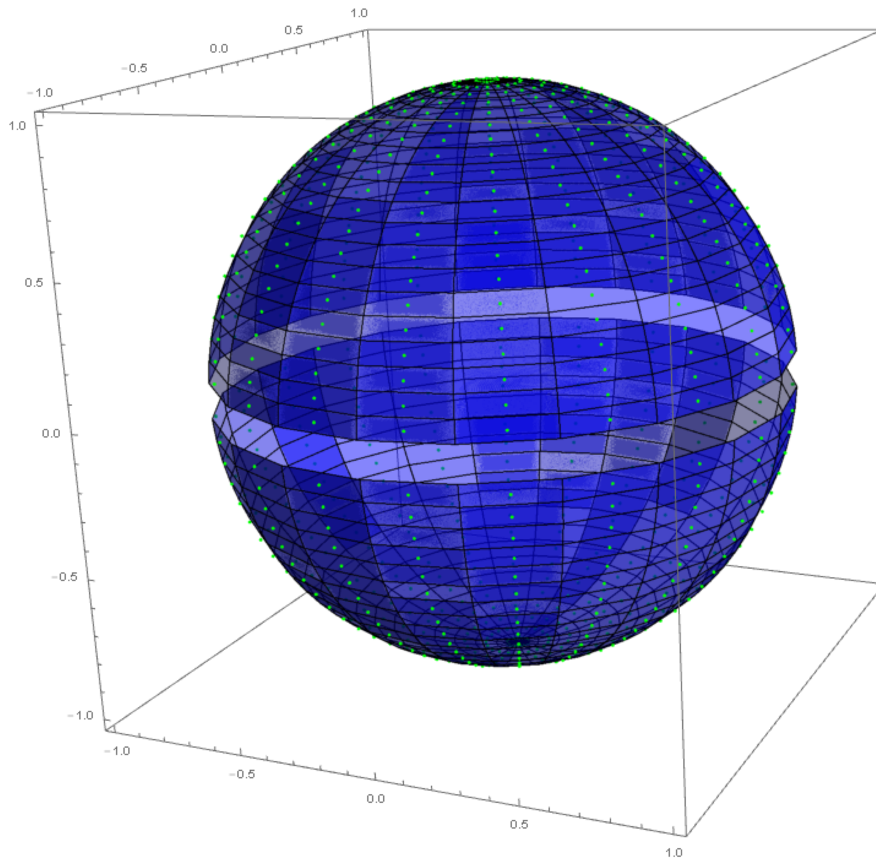
Expression des normes (suite)

Problèmes aux limites	Système de valeurs propres, équation transcendantale : λ_n	Système de Fonctions propres angulaires $\Phi_{\lambda_n}(z)$	Normes des fonctions propres angulaires $\left\Vert \Phi_{\lambda_n}(z) \right\Vert^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz \left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2$
Neumann sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z}{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z} = \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z}{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z}$ $\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}\right] -$ $- \frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}\right]$ $\left\Vert \Phi_{\lambda_n}(z) \right\Vert^2 = \frac{\left(1-\mu_1^2\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z\partial\lambda}}{(2\lambda_n+1)}$
Mixte Robin sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$ $\begin{cases}\alpha_1 \Phi_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1) = 0 \\ \alpha_2 \Phi_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0\end{cases}$	$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} = \frac{1}{\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1 \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} - \beta_1 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right] -$ $- \frac{1}{\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1 \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} - \beta_1 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right]$ $\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{1}{\left(\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{P_{\lambda_n}'(z)}{\left(\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1 \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} - \beta_1 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right] -$ $- \frac{1}{\left(\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}'(z)}{\left(\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1 \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} - \beta_1 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right)\right]$ $\left\Vert \Phi_{\lambda_n}(z) \right\Vert^2 = \frac{\left(1-\mu_2^2\right)\left(\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z\partial\lambda}\right)}{(2\lambda_n+1)}$
Mixte Robin sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$ $\begin{cases}\alpha_1 \Phi_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1) = 0 \\ \alpha_2 \Phi_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0\end{cases}$	$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} = \frac{1}{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2 \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} + \beta_2 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right] -$ $- \frac{1}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2 \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} + \beta_2 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]$ $\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{1}{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{P_{\lambda_n}'(z)}{\left(\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2 \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} + \beta_2 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right] -$ $- \frac{1}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}'(z)}{\left(\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2 \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} + \beta_2 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)\right]$ $\left\Vert \Phi_{\lambda_n}(z) \right\Vert^2 = \frac{\left(\mu_1^2-1\right)\left(\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z\partial\lambda}\right)}{(2\lambda_n+1)}$

Solutions de l'équation de Laplace à l'extérieur d'un domaine Ω

Problème : soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'extérieur d'une sphère à 3 dimensions dont les conditions aux limites de Dirichlet dépendent des angles θ et φ, puis du seul angle θ :

$$\Delta T(r,\theta,\varphi)=0 \quad (r,\theta,\varphi)\in\Omega=\{r\geq l_r\}$$
$$T(r,\theta,\varphi)\big|_{r=l_r}=f(\theta,\varphi) \quad T(r,\theta,\varphi)\big|_{r=\infty}=0$$



Les solutions séparées de l'équation de Laplace sont :

$$T(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l} R''(r)+\dfrac{2}{r}R'(r)-\dfrac{n(n+1)}{r^2}R(r)=0\Rightarrow R(r)=A\,r^n+B\,r^{-(n+1)} \\ \Theta''(\theta)+\dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\left[n(n+1)-\dfrac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta)=0\Rightarrow\Theta(\theta)=A\,P_n^m(Cos(\theta))+B\,Q_n^m(Cos(\theta))\;tq\;m<=n \\ \Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0\Rightarrow\Phi(\varphi)=A\,Cos(\varphi)+B\,Sin(\varphi) \end{array}\right.$$

$P_n^m(z)$ *Fonction de Legendre de degré n et d'ordre m*

$Q_n^m(z)$ *Fonction de Legendre de deuxième espèce de degré n et d'ordre m*

Lorsque l'on réduit à deux dimensions, lorsque la géométrie du problème et des conditions aux limites ne dépendent pas de ϕ, alors les solutions sont :

$$T(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l} R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)-\frac{n(n+1)}{r^2}R(r)=0\Rightarrow R(r)=A\,r^n+B\,r^{-(n+1)} \\ \Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+[n(n+1)]\Theta(\theta)=0\Rightarrow\Theta(\theta)=A\,P_n(Cos(\theta))+B\,Q_n(Cos(\theta))\end{array}\right.$$

$P_n(z)$ *Polynôme de Legendre de degré n* $Q_n(z)$*Fonction de Legendre de deuxième espèce de degré n*

Compte tenu des contraintes déjà définies dans le cas du problème intérieur :

$T(r,\theta,\varphi)$ *fini*

$T(r,\theta,\varphi)$ *périodique en φ de période* 2π *soit* $T(r,\theta,\varphi)=T(r,\theta,\varphi+2\pi)$

$\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}$ *périodique en φ de période* 2π *soit* $\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{\partial T(r,\theta,\varphi+2\pi)}{\partial\varphi}$

$T(r,\theta,\varphi)$ *fonction paire en θ soit* $T(r,-\theta,\varphi)=T(r,\theta,\varphi)$

$T(r,\theta,\varphi)$ *ne comporte aucune singularité en* $\theta=0$, *continue et dérivable*

Cela conduit au choix d'une partie radiale décroissante en r, et d'une partie angulaire construite à l'aide des fonctions de Legendre de première espèce. La solution se développe sous la forme d'une série :

$$T(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=-n,+n}A_{n,m}r^{-(n+1)}P_n^m(Cos(\theta))(CCos(m\varphi)+DSin(m\varphi))$$

Lorsque les conditions aux limites ne dépendent pas de φ. La solution s'écrit :

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}A_n r^{-(n+1)}P_n^m(Cos(\theta))$$

Limitons nous au cas sans dépendance à φ. Compte tenu des conditions aux limites, nous avons alors la solution générale sous la forme :

$$z=Cos(\theta)\quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\;f_\theta(z)\quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\;f_\theta(z)\,P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\left(\frac{l_r}{r}\right)+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{n+1}P_n(Cos(\theta))$$

Ce qui conduit aux solutions suivantes avec des conditions aux limites spécifiques :

$f(\theta)=1-Heaviside(\theta-\pi/2)$ *fonction de Heaviside*

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{l_r}{r}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+2}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

.

$f(\theta)=Heaviside(\theta-\pi/2)$ *fonction de Heaviside*

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{l_r}{r}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+2}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$f(\theta)=T_0(1-Heaviside(\theta-\pi/2))+T_1Heaviside(\theta-\pi/2)$ *fonction de Heaviside*

$$T(r,\theta)=\left(\frac{T_0+T_1}{2}\right)\frac{l_r}{r}+\frac{(T_0-T_1)}{2}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+2}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

donnant la solution triviale $T(r,\theta)=T_0\frac{l_r}{r}$ *dans le cas où la température est identique à la surface de la sphère.*

$$T_0 = 1 \quad T_1 = -1 \quad f(\theta) = 1 - 2Heaviside(\theta - \pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$\Rightarrow T(r,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} \left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+2} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(4n+3)}{2(n+1)} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

.

Lorsque les conditions aux limites sont impaires en angle il vient :

$$f_\theta(\theta) = -f_\theta(\pi - \theta) \Rightarrow f_\theta(z) = -f_\theta(-z)$$

$$z = Cos(\theta)$$

$$B_0 = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z) = 0 \quad B_n = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) \Rightarrow B_{2n} = 0 \quad B_{2n+1} = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z) = 2\int_{0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} B_{2n+1} \frac{(4n+3)}{2} \left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Lorsque les conditions aux limites sont paires en angle il vient :

$$f_\theta(\theta) = f_\theta(\pi - \theta) \Rightarrow f_\theta(z) = f_\theta(-z)$$

$$z = Cos(\theta)$$

$$B_0 = \int_{0}^{1} dz\ f_\theta(z) + \int_{-1}^{0} dz\ f_\theta(z) = \int_{0}^{1} dz\ f_\theta(z) - \int_{1}^{0} dz\ f_\theta(-z) = 2\int_{0}^{1} dz\ f_\theta(z)$$

$$B_n = \int_{0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) + \int_{-1}^{0} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) = \int_{0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) - (-1)^n \int_{1}^{0} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$= (1 + (-1)^n) \int_{0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) \Rightarrow B_{2n+1} = 0$$

$$B_{2n} = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{2n}(z) = 2\int_{0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{2n}(z)$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n=1,+\infty} B_{2n} \frac{(4n+1)}{2} \left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(Cos(\theta))$$

.

.

Problème : soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'extérieur d'une sphère à 3 dimensions dont les conditions aux limites sont de type Robin inhomogènes et dépendent de l' angle θ uniquement :

$$\Delta T(r,\theta,\varphi)=0 \quad (r,\theta,\varphi)\in\Omega=\{r\geq l_r\}$$

$$\alpha\, T_r^{'}(r,\theta)+\beta\, T(r,\theta)\Big|_{r=l_r}=f(\theta) \quad T(r)\Big|_{r=\infty}=0$$

.

$$z=Cos(\theta) \quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\,P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{\frac{1}{r}}{\left(-\frac{\alpha}{l_r^{\,2}}+\frac{\beta}{l_r}\right)}+\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n(2n+1)\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}}{2\left(-\frac{\alpha(n+1)}{l_r^{\,n+2}}+\frac{\beta}{l_r^{\,n+1}}\right)}P_n(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{\frac{l_r}{r}}{\left(\beta-\frac{\alpha}{l_r}\right)}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{\left(\frac{l_r}{r}\right)^{n+1}}{\left(\beta-\frac{\alpha(n+1)}{l_r}\right)}P_n(Cos(\theta))$$

.

Lorsque les conditions aux limites sont impaires en angle il vient :

$$f_\theta(\theta)=-f_\theta(\pi-\theta)\Rightarrow f_\theta(z)=-f_\theta(-z)$$

$$z=Cos(\theta)$$

$$B_0=0 \quad B_{2n+1}=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\,P_{2n+1}(z)=2\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\,P_{2n+1}(z)$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}B_{2n+1}\frac{(4n+3)}{2}\frac{\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+2}}{\left(\beta-\frac{\alpha(2n+2)}{l_r}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Lorsque les conditions aux limites sont paires en angle il vient :

$$f_\theta(\theta)=f_\theta(\pi-\theta)\Rightarrow f_\theta(z)=f_\theta(-z)$$

$$z=Cos(\theta)$$

$$B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)=2\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_{2n+1}=0 \quad B_{2n}=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\,P_{2n}(z)=2\int_{0}^{1}dz\ f_\theta(z)\,P_{2n}(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{\frac{l_r}{r}}{\left(\beta-\frac{\alpha}{l_r}\right)}+\sum_{n=1,+\infty}B_{2n}\frac{(4n+1)}{2}\frac{\left(\frac{l_r}{r}\right)^{2n+1}}{\left(\beta-\frac{\alpha(2n+1)}{l_r}\right)}P_{2n}(Cos(\theta))$$

.

Solution des problèmes extérieur et intérieur électrostatique sur des corps géométrique de révolution connaissant la valeur du potentiel sur l'axe de révolution (d'après Jackson, Classical Electrodynamics)

Connaissant la valeur sur l'axe de révolution, en notant la valeur z=r, et si l'on peut développer cette solution en puissance (ou inverse des puissances) de r selon les limites du domaine borné et le problème intérieur et extérieur, comme suit :

$$z = rCos(\theta) \quad \begin{cases} axe & z > 0 \quad \theta = 0 \\ axe & z < 0 \quad \theta = \pi \end{cases} \quad l_r \text{ défini la limite du domaine borné}$$

$$T(z=r) = \sum_{n=0,+\infty} A_n \left(\frac{r}{l_r}\right)^n \quad z < l_r \quad T(z=r) = \sum_{n=0,+\infty} B_n \left(\frac{l_r}{r}\right)^{n+1} \quad z > l_r$$

Alors les solutions des problèmes intérieur et extérieur dans tous l'espace deviennent :

$$T(z=r) = \sum_{n=0,+\infty} A_n \left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n(Cos(\theta)) \quad z < l_r \quad T(z=r) = \sum_{n=0,+\infty} B_n \left(\frac{l_r}{r}\right)^{n+1} P_n(Cos(\theta)) \quad z > l_r$$

.

Fonction génératrice des polynômes de Legendre

$$\text{Fonction génératrice} \quad \frac{1}{\sqrt{w^2 - 2zw + 1}} = \sum_{n=0,+\infty} P_n(z) w^n$$

$$z = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} = \sum_{n=0,+\infty} P_n(0) w^n = \sum_{n=1,+\infty} P_{2n}(0) w^{2n}$$

Deux points dans le même plan azimutal $(r,\vartheta)(r',\vartheta')$

$$z = Cos(\vartheta - \vartheta') \;\; r > r' \to w = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'Cos(\vartheta - \vartheta')}} = \sum_{n=0,+\infty} P_n(Cos(\vartheta - \vartheta'))\left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0,+\infty} P_n(Cos(\vartheta - \vartheta'))\left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

.

Exemple : Problème extérieur, anneau fin de rayon lra avec une densité linéique de charge q constante, placée à l'origine des coordonnées dans le plan (x,y), potentiel dans tout l'espace, application de la construction précédente :

En construisant la solution du potentiel pour un anneau avec une densité linéique de charge q. avec la solution élémentaire de l'équation de Poisson (intégration sur le plan de l'anneau), on trouve le potentiel sur l'axe de symétrie z :

$$T(z=r) = \frac{2\pi l_{ra} q}{\sqrt{l_{ra}^2 + r^2}} = \begin{cases} \dfrac{2\pi q}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{r}{l_{ra}}\right)^2}} & z < l_{ra} \\ \dfrac{2\pi l_{ra} q}{r\sqrt{1 + \left(\dfrac{l_{ra}}{r}\right)^2}} & z > l_{ra} \end{cases}$$

.

Soit en utilisant la fonction génératrice, donnant le développement en puissance de z (soit ici de r) :

$$T(z=r)=\frac{2\pi l_{ra}q}{\sqrt{l_{ra}^{\ 2}+r^2}}=\begin{cases}\dfrac{2\pi q}{\sqrt{1+\left(\dfrac{r}{l_{ra}}\right)^2}}=2\pi q\sum_{n=0,+\infty}P_n(0)\left(\dfrac{r}{l_{ra}}\right)^n=2\pi q\sum_{n=0,+\infty}P_{2n}(0)\left(\dfrac{r}{l_{ra}}\right)^{2n} & r<l_{ra}\\[2ex] \dfrac{2\pi\ l_{ra}q}{r\sqrt{1+\left(\dfrac{l_{ra}}{r}\right)^2}}=2\pi q\sum_{n=0,+\infty}P_n(0)\left(\dfrac{l_{ra}}{r}\right)^{n+1}=2\pi q\sum_{n=0,+\infty}P_{2n}(0)\left(\dfrac{l_{ra}}{r}\right)^{2n+1} & r>l_{ra}\end{cases}$$

La solution est donc la suivante :

$$T(r,\vartheta)=2\pi q\begin{cases}\sum_{n=0,+\infty}P_{2n}(0)\left(\dfrac{r}{l_{ra}}\right)^{2n}P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r<l_{ra}\\ \sum_{n=0,+\infty}P_{2n}(0)\left(\dfrac{l_{ra}}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r>l_{ra}\end{cases}$$

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\Rightarrow T(r,\vartheta)=2\pi q\begin{cases}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\dfrac{r}{l_{ra}}\right)^{2n}P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r<l_{ra}\\ \sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\dfrac{l_{ra}}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r>l_{ra}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}Q=2\pi q l_{ra}\\ \text{charge totale}\end{matrix}\Rightarrow T(r,\vartheta)=\frac{Q}{l_{ra}}\begin{cases}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\dfrac{r}{l_{ra}}\right)^{2n}P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r<l_{ra}\\ \sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\dfrac{l_{ra}}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r>l_{ra}\end{cases}$$

Pour calculer le potentiel de départ sur l'axe z :

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ *distance entre le point sur l'axe z* $(\mathbf{r})$ *et un point sur l'anneau* $(\mathbf{r}')$*,*

indépendante de l'angle polaire ϑ *dans le plan de l'anneau*

$$T(z=r)=q\oint\frac{dl'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=q\oint\frac{dl'}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z^2}}\quad dl'=l_{ra}d\vartheta\Rightarrow T(z=r)=\frac{ql_{ra}}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z^2}}\int_0^{2\pi}d\vartheta=\frac{2\pi ql_{ra}}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z^2}}.$$

Si l'anneau est placé au dessus (ou en dessous) du plan (x,y) à une valeur z=za, le potentiel sur l'axe z est alors le suivant :

$$T(z=r)=\frac{2\pi ql_{ra}}{\sqrt{l_{ra}{}^2+(z-z_a)^2}}=\frac{2\pi ql_{ra}}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2+z^2-2zz_a}}$$

$$Tan(\alpha)=\frac{l_{ra}}{z_a}\quad Cos(\alpha)=\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\quad \varsigma=\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}=Cos(\alpha)$$

$$Cos(\alpha)\in[-1,+1]\quad \lim_{z_a\to\pm\infty}Cos(\alpha)=\pm1$$

$$T(z=r)=\begin{cases}\dfrac{2\pi ql_{ra}}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}\sqrt{1+\left(\dfrac{z}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\right)^2-\dfrac{2zz_a}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}}} & |z|<\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}\quad(1)\\[2ex] \dfrac{2\pi ql_{ra}}{z\sqrt{1+\left(\dfrac{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}{z}\right)^2-\dfrac{2z_a}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\dfrac{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}{z}}} & |z|>\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}\quad(2)\end{cases}$$

$$(1)\quad w=\frac{z}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\qquad(2)\quad w=\frac{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}{z}$$

$$Comme\quad \frac{1}{\sqrt{1+w^2-2\varsigma w}}=\sum_{n=0,+\infty}P_n(\varsigma)w^n\quad w<1$$

$$T(z=r)=\begin{cases}\dfrac{2\pi ql_{ra}}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\displaystyle\sum_{n=0,+\infty}P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\right)^n & |z|<\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}\\[2ex] \dfrac{2\pi ql_{ra}}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\displaystyle\sum_{n=0,+\infty}P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\right)\left(\frac{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}{z}\right)^{n+1} & |z|>\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}\end{cases}.$$

Le potentiel en tout point s'écrit alors :

$$T(r,\theta)=\frac{2\pi ql_{ra}}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0,+\infty}P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\right)P_n(Cos(\theta))\left(\frac{r}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\right)^n & r<\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}\\[2ex] \displaystyle\sum_{n=0,+\infty}P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}\right)P_n(Cos(\theta))\left(\frac{\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}}{r}\right)^{n+1} & r>\sqrt{l_{ra}{}^2+z_a{}^2}\end{cases}.$$

qui est aussi égal à l'expression suivante en utilisant la parité des polynômes de Legendre :

$$T(r,\theta)=\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\begin{cases}\sum_{n=0,+\infty}P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)P_n(-Cos(\theta))\left(\frac{r}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)^n & r<\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\\ \sum_{n=0,+\infty}P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)P_n(-Cos(\theta))\left(\frac{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}{r}\right)^{n+1} & r>\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\end{cases}.$$

Revenons à l'anneau centré sur l'origine dans le plan (x,y) et calculons maintenant la valeur du potentiel dans le plan z=0 :

$$T\left(r,\theta=\frac{\pi}{2}\right)=2\pi\, q\begin{cases}\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{r}{l_{ra}}\right)^{2n}(P_{2n}(0))^2 & r<l_{ra}\\ \sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{l_{ra}}{r}\right)^{2n+1}(P_{2n}(0))^2 & r>l_{ra}\end{cases}.$$

Pour la valeur r=lra, cette somme diverge donc le potentiel sur l'anneau est infini.

Exemple : Problème extérieur, filament fin de longueur 2l avec une densité linéique de charge q, potentiel dans tout l'espace, application de la construction précédente :

En construisant la solution du potentiel sur l'axe z pour le filament avec une densité linéique de charge q, il vient :

$|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|$ *distance entre le point d'observation* $(\mathbf{r})$ *et un point sur le filament* $(\mathbf{r'})$,

$$T(x,y,z)=q\oint\frac{dl'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}\Rightarrow T(x,y,z)=q\int_{-l}^{+l}\frac{dl'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l')^2}}=\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2}}\int_{z-l}^{z+l}\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$T(x,y,z)=q\left[ArcSinh(u)\right]_{\frac{z-l}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{\frac{z+l}{\sqrt{x^2+y^2}}}\quad De\ plus\quad ArcSinh(u)=Log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$$

$$\Rightarrow T(x,y,z)=qLog\left(\frac{z+l+\sqrt{x^2+y^2+(z+l)^2}}{z-l+\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Sphérique\quad T(r,\theta)=qLog\left(\frac{rCos(\theta)+l+\sqrt{r^2+l^2+2rlCos(\theta)}}{rCos(\theta)-l+\sqrt{r^2+l^2-2rlCos(\theta)}}\right)\\ Axi-Cylindrique\quad T(\rho,z)=qLog\left(\frac{z+l+\sqrt{\rho^2+(z+l)^2}}{z-l+\sqrt{\rho^2+(z-l)^2}}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow T(0,0,z)=qLog\left(\frac{z+l+|z+l|}{z-l+|z-l|}\right)\Rightarrow|z|<l\quad T(0,0,z)\to\infty$$

$$|z|>l\Rightarrow T(0,0,z)=qLog\left(\frac{z+l}{z-l}\right)=2q\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{l}{z}\right)^{2n+1}$$

La solution est donc la suivante pour r> l

$$T(r,\vartheta)=2\,q\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P_{2n}(Cos(\vartheta))}{2n+1}\left(\frac{l}{r}\right)^{2n+1}\quad r>l.$$

Pour r<l, on utilise l'expression littérale :

$$T(r,\theta) = qLog\left(\frac{rCos(\theta) + l + \sqrt{r^2 + l^2 + 2rlCos(\theta)}}{rCos(\theta) - l + \sqrt{r^2 + l^2 - 2rlCos(\theta)}} \right)$$

$$\Rightarrow T(r,\theta) = qLog\left(\frac{\frac{r}{l}Cos(\theta) + 1 + \sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2} + 2\frac{r}{l}Cos(\theta)}}{\frac{r}{l}Cos(\theta) - 1 + \sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2} - 2\frac{r}{l}Cos(\theta)}} \right)$$

Exemple : Problème extérieur, sphéroïde allongé (grand axe a, petit axe b) de potentiel V0, potentiel dans tout l'espace extérieur, application de la construction précédente.

On part de l'expression connue du potentiel dans l'espace extérieur en coordonnées sphéroïdales allongées :

$$T(\eta,\tau) = V_0 \frac{Q_0(Cosh(\eta))}{Q_0(Cosh(\eta_0))} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = cSinh(\eta)Sin(\tau) \quad z = cCosh(\eta)Cos(\tau)$$

$$a = cCosh(\eta_0) \quad b = cSinh(\eta_0) \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$Q_0(Cosh(\eta)) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{Cosh(\eta) + 1}{Cosh(\eta) - 1} \right)$$

Sur l'axe z, il vient :

$$\tau = 0,\pi \quad z = \pm cCosh(\eta) \Rightarrow z > 0 \quad Cosh(\eta) = \frac{z}{c}$$

$$\Rightarrow T(z) = V_0 \frac{Q_0\left(\frac{z}{c}\right)}{Q_0\left(\frac{a}{c}\right)} \quad Q_0\left(\frac{z}{c}\right) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{\frac{z}{c} + 1}{\frac{z}{c} - 1} \right) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{1 + \frac{c}{z}}{1 - \frac{c}{z}} \right)$$

$$\text{Extérieur du sphéroïde allongé} \Rightarrow z > c \Rightarrow Q_0(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x = \frac{c}{z}$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{V_0}{Q_0(Cosh(\eta_0))} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{c}{z}\right)^{2n+1} \Rightarrow z \to r \quad \text{en coordonnées sphériques}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta) = \frac{V_0}{Q_0(Cosh(\eta_0))} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(Cos(\vartheta))$$

La valeur sur le plan z=0 devient :

$$\Rightarrow T(r,0) = \frac{V_0}{Q_0(Cosh(\eta_0))} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(0)$$

$$\text{Plan équatorial} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = r = cSinh(\eta) \Rightarrow \frac{c}{r} = \frac{1}{Sinh(\eta)}$$

$$\Rightarrow T(r,0) = \frac{V_0}{Q_0(Cosh(\eta_0))} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_{2n}(0)}{(2n+1)Sinh(\eta)^{2n+1}} \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$\Rightarrow T(r,0) = \frac{V_0}{Q_0(Cosh(\eta_0))} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)Sinh(\eta)^{2n+1}}$$

Profil sur le plan qui se révèle identique au profil calculé en coordonnées sphéroïdales allongées :

$$T(r,0)=\frac{V_0}{Q_0(Cosh(\eta_0))}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)Sinh(\eta)^{2n+1}}=V_0\frac{Q_0(Cosh(\eta))}{Q_0(Cosh(\eta_0))}$$

$$\Rightarrow Q_0(Cosh(\eta))=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)Sinh(\eta)^{2n+1}}$$

Exemple : Problème extérieur, sphéroïde aplati (grand axe a, petit axe b) de potentiel V0, potentiel dans tout l'espace extérieur, application de la construction précédente.

On part de l'expression connue du potentiel dans l'espace extérieur en coordonnées sphéroïdales allongées :

$$T(\eta,\tau)=V_0\frac{Q_0(iSinh(\eta))}{Q_0(iSinh(\eta_0))}\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}=cCosh(\eta)Sin(\tau)\quad z=cSinh(\eta)Cos(\tau)$$

$$a=cCosh(\eta_0)\quad b=cSinh(\eta_0)\quad c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$Q_0(iSinh(\eta))=\frac{1}{2}Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)=\frac{1}{i}ArcCotan(Sinh(\eta))\Rightarrow T(\eta,\tau)=V_0\frac{ArcCotan(Sinh(\eta))}{ArcCotan(Sinh(\eta_0))}$$

Sur l'axe z, il vient :

$$\tau=0,\pi\quad z=\pm cSinh(\eta)\Rightarrow z>0\quad Sinh(\eta)=\frac{z}{c}$$

$$T(z)=V_0\frac{ArcCotan\left(\frac{z}{c}\right)}{ArcCotan\left(\frac{b}{c}\right)}\quad \textit{Extérieur du sphéroïde aplati}\Rightarrow z>c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ArcCotan\left(\frac{z}{c}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)x^{2n+1}}\qquad x=\frac{z}{c}$$

$$\Rightarrow T(z)=\frac{V_0}{ArcCotan\left(\frac{b}{c}\right)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{c}{z}\right)^{2n+1}\Rightarrow z\to r\quad \textit{en coordonnées sphériques}\quad (r,\vartheta)$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta)=\frac{V_0}{ArcCotan\left(\frac{b}{c}\right)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(Cos(\vartheta))$$

La valeur sur le plan z=0 devient :

$$\Rightarrow T(r,0)=\frac{V_0}{ArcCotan\left(\frac{b}{c}\right)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(0)$$

$$\textit{Plan équatorial}\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}=r=cCosh(\eta)\Rightarrow\frac{c}{r}=\frac{1}{Cosh(\eta)}$$

$$\Rightarrow T(r,0)=\frac{V_0}{ArcCotan\left(\frac{b}{c}\right)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{Cosh(\eta)^{2n+1}}P_{2n}(0)\quad P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$\Rightarrow T(r,0)=\frac{V_0}{ArcCotan\left(\frac{b}{c}\right)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{(2n+1)Cosh(\eta)^{2n+1}}$$

Profil sur le plan qui se révèle identique au profil calculé en coordonnées sphéroïdales aplati:

$$T(r,0)=\frac{V_0}{Q_0(iSinh(\eta_0))}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)Cosh(\eta)^{2n+1}}=iV_0\frac{Q_0(iSinh(\eta))}{Q_0(iSinh(\eta_0))}$$

$$\Rightarrow iQ_0(iSinh(\eta))=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)Cosh(\eta)^{2n+1}}$$

Exemple : Problème extérieur, anneau fin de rayon lra avec une densité linéique de charge q constante, potentiel dans tout l'espace, placé au dessus d'un plan infini conducteur d'angle θ0, de valeur nulle pour le potentiel à la surface du plan

La reconfiguration des charges dans l'anneau ne se modifie pas en présence du plan conducteur puisque la géométrie respecte la symétrie autour de l'axe de révolution. La densité de charge linéique est donc censé rester constante, et l'on peut employer la méthode des images électriques afin de placer une anneau de charge inverse sous le plan et à égale distance. Sur l'axe le potentiel devient alors :

$$T(z=r)=\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2+z^2-2zz_a}}-\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2+z^2+2zz_a}}$$

$$\Rightarrow T(z=r)=\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\begin{cases}\sum_{n=0,+\infty}\left(P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)-P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)\right)\left(\frac{z}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)^n & |z|<\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\\ \sum_{n=0,+\infty}\left(P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)-P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)\right)\left(\frac{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}{z}\right)^{n+1} & |z|>\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\end{cases}$$

Le potentiel en tout point s'écrit alors :

$$T(r,\theta)=\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\begin{cases}\sum_{n=0,+\infty}\left(P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)-P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)\right)P_n(Cos(\theta))\left(\frac{r}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)^n & r<\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\\ \sum_{n=0,+\infty}\left(P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)-P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)\right)P_n(Cos(\theta))\left(\frac{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}{r}\right)^{n+1} & r>\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\end{cases}$$

D'autre part compte tenu des propriétés de parité des polynômes de Legendre, il vient :

$$P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)=(-1)^nP_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)\Rightarrow$$

$$T(r,\theta)=\frac{4\pi q l_{ra}}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\begin{cases}\sum_{n=0,+\infty}P_{2n+1}\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)P_{2n+1}(Cos(\theta))\left(\frac{r}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)^{2n+1} & r<\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\\ \sum_{n=0,+\infty}P_{2n+1}\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)P_{2n+1}(Cos(\theta))\left(\frac{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}{r}\right)^{2n+2} & r>\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\end{cases}$$

$$T(r,\theta=0)=0\quad P_{2n+1}(0)=0$$

De part cette construction à l'aide de la méthode des images on a bien une solution qui s'annule sur le plan de « réflexion » et respecte la condition aux limites du plan d'iso-potentiel nul.

Exemple : Problème extérieur, anneau fin de rayon lra, placé à l'origine avec une densité linéique de charge q, potentiel dans tout l'espace, entourant une sphère conductrice de rayon ls, la>ls, de valeur nulle pour le potentiel à la surface de la sphère

Là encore la configuration des charges dans l'anneau ne se modifie pas en présence de la sphère conductrice puisque la géométrie respecte la symétrie autour de l'axe de révolution. Le potentiel total est donc l'ajout du potentiel précédemment calculé de l'anneau avec un potentiel dit de surface tel que le potentiel résultant est nul sur la sphère conductrice :

$$T(r,\theta) = T_a(r,\theta) + T_s(r,\theta) \quad l_s < l_a$$

$$T_a(r,\vartheta) = 2\pi\, q \begin{cases} \sum\limits_{n=0,+\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\dfrac{r}{l_a}\right)^{2n} P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r < l_a \\ \sum\limits_{n=0,+\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\dfrac{l_a}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r > l_a \end{cases}$$

$$T_s(r,\theta) \quad tq \quad T_s(r,\theta)\big|_{r=l_s} = -T_a(r,\theta)\big|_{r=l_s} = -2\pi\, q \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{l_s}{l_a}\right)^{2n} P_{2n}(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow T_s(r,\vartheta) = -2\pi\, q \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{l_s}{l_a}\right)^{2n} \left(\frac{l_s}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(Cos(\vartheta))$$

$$T(r,\theta) = 2\pi\, q \begin{cases} \sum\limits_{n=0,+\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left\{ \left(\dfrac{r}{l_a}\right)^{2n} - \left(\dfrac{l_s}{l_a}\right)^{2n} \left(\dfrac{l_s}{r}\right)^{2n+1} \right\} P_{2n}(Cos(\vartheta)) & l_s < r < l_a \\ \sum\limits_{n=0,+\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left\{ \left(\dfrac{l_a}{r}\right)^{2n+1} - \left(\dfrac{l_s}{l_a}\right)^{2n} \left(\dfrac{l_s}{r}\right)^{2n+1} \right\} P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r > l_a \end{cases}$$

Exemple : problème intérieur, anneau fin de rayon la, centré à l'origine avec une densité linéique de charge q, potentiel dans tout l'espace, à l'intérieur d'une sphère conductrice de rayon ls, la<ls, de valeur nulle pour le potentiel à la surface de la sphère

Là encore la configuration des charges dans l'anneau ne se modifie pas en présence de la sphère conductrice puisque la géométrie respecte la symétrie autour de l'axe de révolution. Le potentiel total est donc l'ajout du potentiel précédemment calculé de l'anneau avec un potentiel dit de surface tel que le potentiel résultant est nul sur la sphère conductrice :

$$T(r,\theta)=T_a(r,\theta)+T_s(r,\theta) \quad l_a<l_s$$

$$T_a(r,\vartheta)=2\pi\, q\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{l_a}\right)^{2n}P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r<l_a\\ \displaystyle\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{l_a}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r>l_a\end{cases}$$

$$T_s(r,\theta) \quad tq \quad T_s(r,\theta)\Big|_{r=l_s}=-T_a(r,\theta)\Big|_{r=l_s}=-2\pi\, q\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2n+1}P_{2n}(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow T_s(r,\vartheta)=-2\pi\, q\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2n+1}\left(\frac{r}{l_s}\right)^{2n}P_{2n}(Cos(\vartheta))$$

$$T(r,\theta)=2\pi\, q\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left\{\left(\frac{r}{l_a}\right)^{2n}-\left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2n+1}\left(\frac{r}{l_s}\right)^{2n}\right\}P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r<l_a\\ \displaystyle\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left\{\left(\frac{l_a}{r}\right)^{2n+1}-\left(\frac{l_a}{l_s}\right)^{2n+1}\left(\frac{r}{l_s}\right)^{2n}\right\}P_{2n}(Cos(\vartheta)) & l_a<r<l_s\end{cases}$$

.

Exemple : Problème du potentiel dans tout l'espace intérieur à un cône infini, anneau fin de rayon lra avec une densité linéique de charge q, placé à la hauteur za au dessus du sommet du cône conducteur d'angle θ0, de valeur nulle pour le potentiel à la surface du cône.

L'anneau étant situé à l'intérieur du cône, on peut exprimer la contrainte suivant des angles :

$$\alpha < \theta_0 \Rightarrow Cos(\alpha) = \frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}} > Cos(\theta_0)$$

.

Là encore la configuration des charges dans l'anneau ne se modifie pas en présence du cône conducteur puisque la géométrie respecte la symétrie autour de l'axe de révolution. Le potentiel total est donc l'ajout du potentiel précédemment calculé avec un potentiel dit de surface tel que le potentiel résultant est nul sur le cône conducteur. Il vient :

$$T(r,\theta) = T_a(r,\theta) + T_s(r,\theta) \qquad T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow T_s(r,\theta) \quad tq \quad T_s(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0} = -T_a(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}$$

$$T_s(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^{+\infty} d\tau \, \{A(\tau) Cos(\tau \, Log(r)) + B(\tau) Sin(\tau \, Log(r))\} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$A(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dr \, \frac{f(r)}{\sqrt{r}} Cos(\tau \, Log(r)) \quad B(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dr \, \frac{f(r)}{\sqrt{r}} Sin(\tau \, Log(r))$$

$$T_a(r,\theta) = \frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}} \begin{cases} \sum_{n=0,+\infty} P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}\right) P_n(Cos(\theta)) \left(\frac{r}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}\right)^n & r < \sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2} \\ \sum_{n=0,+\infty} P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}\right) P_n(Cos(\theta)) \left(\frac{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}{r}\right)^{n+1} & r > \sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(r) = T_s(r,\theta_0) = -\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}} \begin{cases} \sum_{n=0,+\infty} P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}\right) P_n(Cos(\theta_0)) \left(\frac{r}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}\right)^n & r < \sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2} \\ \sum_{n=0,+\infty} P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}\right) P_n(Cos(\theta_0)) \left(\frac{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}{r}\right)^{n+1} & r > \sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\tau) = -\frac{2 q l_{ra}}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}} \sum_{n=0,+\infty} P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}\right) P_n(Cos(\theta_0)) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\left(l_{ra}^2 + z_a^2\right)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}} dr \, Cos(\tau \, Log(r)) r^{n-\frac{1}{2}} + \\ + \left(l_{ra}^2 + z_a^2\right)^{\frac{n+1}{2}} \int_{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}^{+\infty} dr \, \frac{Cos(\tau \, Log(r))}{r^{n+\frac{3}{2}}} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow B(\tau) = -\frac{2 q l_{ra}}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}} \sum_{n=0,+\infty} P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}\right) P_n(Cos(\theta_0)) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\left(l_{ra}^2 + z_a^2\right)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}} dr \, Sin(\tau \, Log(r)) r^{n-\frac{1}{2}} + \\ + \left(l_{ra}^2 + z_a^2\right)^{\frac{n+1}{2}} \int_{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}^{+\infty} dr \, \frac{Sin(\tau \, Log(r))}{r^{n+\frac{3}{2}}} \end{array} \right\}$$

Calculons les intégrales suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} u = Log(r) \quad dr = r du \\ r = e^{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^x dr\ r^{\alpha} Cos(\tau\ Log(r)) = \int_{-\infty}^{Log(x)} du\ e^{(\alpha+1)u} Cos(\tau\ u) = \left[\dfrac{e^{(\alpha+1)u}\{(1+\alpha)Cos(\tau\ u) + \tau\ Sin(\tau\ u)\}}{(1+\alpha)^2 + \tau^2}\right]_{-\infty}^{Log(x)} \\ \int_0^x dr\ r^{\alpha} Sin(\tau\ Log(r)) = \int_{-\infty}^{Log(x)} du\ e^{(\alpha+1)u} Sin(\tau\ u) = \left[\dfrac{e^{(\alpha+1)u}\{(1+\alpha)Sin(\tau\ u) - \tau\ Sin(\tau\ u)\}}{(1+\alpha)^2 + \tau^2}\right]_{-\infty}^{Log(x)} \\ \int_x^{+\infty} dr\ r^{-\alpha} Cos(\tau\ Log(r)) = \int_{Log(x)}^{+\infty} du\ e^{(1-\alpha)u} Cos(\tau\ u) = \left[\dfrac{e^{(1-\alpha)u}\{(1-\alpha)Cos(\tau\ u) + \tau\ Sin(\tau\ u)\}}{(1-\alpha)^2 + \tau^2}\right]_{Log(x)}^{+\infty} \\ \int_x^{+\infty} dr\ r^{-\alpha} Sin(\tau\ Log(r)) = \int_{Log(x)}^{+\infty} du\ e^{(1-\alpha)u} Sin(\tau\ u) = \left[\dfrac{e^{(1-\alpha)u}\{(1-\alpha)Sin(\tau\ u) - \tau\ Sin(\tau\ u)\}}{(1-\alpha)^2 + \tau^2}\right]_{Log(x)}^{+\infty} \end{cases}$$

$$Si \quad \alpha > -1 \Rightarrow \begin{cases} \int_0^x dr\ r^{\alpha} Cos(\tau\ Log(r)) = \dfrac{x^{(\alpha+1)}\{(\alpha+1)Cos(\tau\ Log(x)) + \tau\ Sin(\tau\ Log(x))\}}{(\alpha+1)^2 + \tau^2} \\ \int_0^x dr\ r^{\alpha} Sin(\tau\ Log(r)) = \dfrac{x^{(\alpha+1)}\{(\alpha+1)Sin(\tau\ Log(x)) - \tau\ Cos(\tau\ Log(x))\}}{(\alpha+1)^2 + \tau^2} \end{cases}$$

$$Si \quad \alpha > 1 \Rightarrow \begin{cases} \int_x^{+\infty} dr\ r^{-\alpha} Cos(\tau\ Log(r)) = \dfrac{x^{(1-\alpha)}\{(\alpha-1)Cos(\tau\ Log(x)) - \tau\ Sin(\tau\ Log(x))\}}{(\alpha-1)^2 + \tau^2} \\ \int_x^{+\infty} dr\ r^{-\alpha} Sin(\tau\ Log(r)) = \dfrac{x^{(1-\alpha)}\{(\alpha-1)Sin(\tau\ Log(x)) + \tau\ Cos(\tau\ Log(x))\}}{(\alpha-1)^2 + \tau^2} \end{cases}$$

Soit pour les intégrales de l'expression ci-avant :

$$\alpha = \frac{2n-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}} dr\ r^{\alpha} Cos(\tau\ Log(r)) = \dfrac{2\left(l_{ra}^2 + z_a^2\right)^{\frac{2n+1}{4}} \left\{\begin{array}{l} (2n+1)Cos\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}\right)\right) + \\ + 2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}\right)\right) \end{array}\right\}}{(2n+1)^2 + 4\tau^2} \\ \int_0^{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}} dr\ r^{\alpha} Sin(\tau\ Log(r)) = \dfrac{2\left(l_{ra}^2 + z_a^2\right)^{\frac{2n+1}{4}} \left\{\begin{array}{l} (2n+1)Sin\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}\right)\right) - \\ - 2\tau\ Cos\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}\right)\right) \end{array}\right\}}{(2n+1)^2 + 4\tau^2} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{2n+3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \int_{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}^{+\infty} dr\ r^{-\alpha} Cos(\tau\ Log(r)) = \dfrac{2\left(l_{ra}^2 + z_a^2\right)^{-\frac{2n+1}{4}} \left\{\begin{array}{l} (2n+1)Cos\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}\right)\right) - \\ - 2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}\right)\right) \end{array}\right\}}{(2n+1)^2 + 4\tau^2} \\ \int_{\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}}^{+\infty} dr\ r^{-\alpha} Sin(\tau\ Log(r)) = \dfrac{2\left(l_{ra}^2 + z_a^2\right)^{-\frac{2n+1}{4}} \left\{\begin{array}{l} (2n+1)Sin\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}\right)\right) + \\ + 2\tau\ Cos\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^2 + z_a^2}\right)\right) \end{array}\right\}}{(2n+1)^2 + 4\tau^2} \end{cases}$$

Avec les expressions intermédiaires, les coefficients s'écrivent :

$$\frac{1}{\left(l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}\right)^{\frac{n}{2}}}\int_{0}^{\sqrt{l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}}} dr\ Cos(\tau\ Log(r))r^{n-\frac{1}{2}}+\left(l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\int_{\sqrt{l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}}}^{+\infty} dr\frac{Cos(\tau\ Log(r))}{r^{n+\frac{3}{2}}}=$$

$$=4\frac{\left(l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}\right)^{\frac{1}{4}}(2n+1)Cos\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}}\right)\right)}{(2n+1)^{2}+4\tau^{2}}$$

$$\frac{1}{\left(l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}\right)^{\frac{n}{2}}}\int_{0}^{\sqrt{l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}}} dr\ Sin(\tau\ Log(r))r^{n-\frac{1}{2}}+\left(l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\int_{\sqrt{l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}}}^{+\infty} dr\frac{Sin(\tau\ Log(r))}{r^{n+\frac{3}{2}}}=$$

$$=4\frac{\left(l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}\right)^{\frac{1}{4}}(2n+1)Sin\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}}\right)\right)}{(2n+1)^{2}+4\tau^{2}}$$

$$A(\tau)=-\frac{8ql_{ra}}{\left(l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}\right)^{\frac{1}{4}}}\sum_{n=0,+\infty}P_{n}\left(\frac{z_{a}}{\sqrt{l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}}}\right)P_{n}(Cos(\theta_{0}))\frac{(2n+1)Cos\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}}\right)\right)}{(2n+1)^{2}+4\tau^{2}}$$

$$B(\tau)=-\frac{8ql_{ra}}{\left(l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}\right)^{\frac{1}{4}}}\sum_{n=0,+\infty}P_{n}\left(\frac{z_{a}}{\sqrt{l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}}}\right)P_{n}(Cos(\theta_{0}))\frac{(2n+1)Sin\left(\tau\ Log\left(\sqrt{l_{ra}^{2}+z_{a}^{2}}\right)\right)}{(2n+1)^{2}+4\tau^{2}}$$

Injectons les expressions dans la solution, il vient :

$$T_a(r,\theta)=\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\begin{cases}\sum_{n=0,+\infty}P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)P_n(Cos(\theta))\left(\frac{r}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)^n & r<\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\\ \sum_{n=0,+\infty}P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)P_n(Cos(\theta))\left(\frac{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}{r}\right)^{n+1} & r>\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\end{cases}$$

$$T_s(r,\theta)=-\frac{8ql_{ra}}{\left({l_{ra}}^2+{z_a}^2\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{r}}\sum_{n=0,+\infty}(2n+1)P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)P_n(Cos(\theta_0))\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\frac{Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)\right)}{(2n+1)^2+4\tau^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}\right\}$$

$$T(r,\theta)=T_a(r,\theta)+T_s(r,\theta)$$

$$T(r,\theta)=\left\{\begin{array}{l}\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\left[\begin{array}{ll}\sum_{n=0,+\infty}P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)P_n(Cos(\theta))\left(\frac{r}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)^n & r<\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\\ \sum_{n=0,+\infty}P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)P_n(Cos(\theta))\left(\frac{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}{r}\right)^{n+1} & r>\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}\end{array}\right]-\\ -\frac{8ql_{ra}}{\left({l_{ra}}^2+{z_a}^2\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{r}}\sum_{n=0,+\infty}\left[\begin{array}{l}(2n+1)P_n\left(\frac{z_a}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)P_n(Cos(\theta_0))\times\\ \times\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{\sqrt{{l_{ra}}^2+{z_a}^2}}\right)\right)}{(2n+1)^2+4\tau^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

.

Représentation intégrale de la solution du problème extérieur de Dirichlet inhomogène sur la surface d'une section conique-sphérique à trois dimensions

Pour le problème extérieur :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$\begin{cases}\Omega=\{(r,\theta)\in[0,+\infty]\times[\theta_0,\pi]\}\\ T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f_r(r)\end{cases} \quad Condition \quad \begin{cases}Lim_{r\to+\infty}T(r,\theta)=0 \quad Lim_{\theta\to\pi}T(r,\theta) \quad finie\\ Lim_{r\to+\infty}f_r(r)=0\end{cases}$$

Comme nous l'avons vu les fonctions suivantes sont solutions de l'équation de Laplace :

$$\Phi_\tau^r(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_\tau^r\,Cos(\tau\ Log(r))+B_\tau^r\,Sin(\tau\ Log(r))\right) \quad \hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))\propto P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))$$

$$\Phi_\tau^\theta(\theta)=A_\tau^\theta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))+B_\tau^\theta \hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))=A_\tau^\theta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))+C_\tau^\theta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))$$

La condition de finitude en ϑ=π, implique que cette solution se développe sous la forme :

$$T(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_\tau^r\,Cos(\tau\ Log(r))+B_\tau^r\,Sin(\tau\ Log(r))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))$$

L'introduction similaire d'un développement en en intégrale de Fourier généralisée de la fonction limite, conduit à la représentation intégrale suivante de la solution du problème extérieur :

$$T(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\left(F_c(\tau)Cos(\tau\ Log(r))+F_s(\tau)Sin(\tau\ Log(r))\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}$$

$$avec \quad \begin{cases}F_c(\tau)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}dr\left(\frac{f_r(r)}{\sqrt{r}}Cos(\tau\,Log(r))\right)\\ F_s(\tau)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}dr\left(\frac{f_r(r)}{\sqrt{r}}Sin(\tau\,Log(r))\right)\end{cases}$$

$$Conditions\ sur\ la\ fonction\ limite \quad \begin{cases}f_r(r)\ continue \quad f_r(r)\ bornée\ sur\ tout\ interval\ [r1,r2]\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}dr\frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}} \quad est\ finie\end{cases}$$

On traite le même problème d'électrostatique que celui de Lebedev : on doit trouver le potentiel électrostatique à l'extérieur d'un cône conducteur gardé au potentiel 0, si l'on place à une distance a sous le sommet une charge q. Pour cela on effectue les mêmes calculs en inversant le signe de le l'argument cosinus de l'angle. :

$$T(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2a\,r\,Cos(\theta)}}+U(r,\theta) \quad T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0\Rightarrow U(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=-\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2a\,r\,Cos(\theta_0)}}$$

$$U(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\left(F_c(\tau)Cos(\tau\ Log(r))+F_s(\tau)Sin(\tau\ Log(r))\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}$$

$$avec \quad F_c(\tau)=-\frac{qCos(\tau\,Log(a))}{\sqrt{a}Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0)) \quad F_s(\tau)=-\frac{qSin(\tau\,Log(a))}{\sqrt{a}Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))$$

La solution du problème est alors donnée par l'intégrale :

$$U(r,\theta)=-\frac{q}{\sqrt{a}\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)}Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{a}\sqrt{r}}\left(\frac{q}{\sqrt{\frac{r}{a}+\frac{a}{r}+2Cos(\theta)}}-\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)}Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}\right)$$

Au passage on revérifie aisément que la condition aux limites est bien respectée, à l'aide de transformée et transformée inverse de Fourier suivante :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}ds\frac{Cos(\tau s)}{\sqrt{Cosh(s)-Cos(\vartheta)}}=\sqrt{\pi}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))}{Cosh(\pi\tau)}\Leftrightarrow\sqrt{2}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{Cos(\tau s)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))}{Cosh(\pi\tau)}=\frac{1}{\sqrt{Cosh(s)-Cos(\vartheta)}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}ds\frac{Cos(\tau s)}{\sqrt{Cosh(s)+Cos(\vartheta)}}=\sqrt{\pi}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{Cosh(\pi\tau)}\Leftrightarrow\sqrt{2}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{Cos(\tau s)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{Cosh(\pi\tau)}=\frac{1}{\sqrt{Cosh(s)+Cos(\vartheta)}}$$

$$T(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{a}\sqrt{r}}\left(\frac{q}{\sqrt{\frac{r}{a}+\frac{a}{r}+2Cos(\theta)}}-\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)}Cos\left(\tau\,Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}\right)$$

$$s=Log\left(\frac{r}{a}\right)\Rightarrow T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=\frac{q}{\sqrt{a}\sqrt{r}}\left(\frac{q}{\sqrt{\frac{r}{a}+\frac{a}{r}+2Cos(\theta_0)}}-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(s)+Cos(\theta_0)}}\right)$$

$$2Cosh(s)=\frac{r}{a}+\frac{a}{r}\Rightarrow T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$$

Exemple : Problème du potentiel dans tout l'espace extérieur à un cône infini, anneau fin de rayon lra avec une densité linéique de charge q, placé à la distance za au dessus ou en dessous du sommet du cône conducteur d'angle θ0, de valeur nulle pour le potentiel à la surface du cône.

L'anneau étant situé à l'extérieur du cône, il y a lieu de tenir compte de la contrainte suivante des angles :

$$z_a<0\Rightarrow -Cos(\alpha)=\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^{\;2}+z_a^{\;2}}}\quad ou\quad z_a>0\quad et\quad \alpha>\theta_0\Rightarrow Cos(\alpha)=\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^{\;2}+z_a^{\;2}}}<Cos(\theta_0)$$

.

Là encore la configuration des charges dans l'anneau ne se modifie pas en présence du cône conducteur puisque la géométrie respecte la symétrie autour de l'axe de révolution. Le potentiel total est donc l'ajout du potentiel précédemment calculé avec un potentiel dit de surface tel que le potentiel résultant est nul sur le cône conducteur. Dans ces deux configurations de l'anneau, on utilise l'expression alternative du potentiel de l'anneau pour l'exprimer à l'aide de l'angle complémentaire π-θ :

$$T(r,\theta)=T_a(r,\theta)+T_s(r,\theta) \qquad T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \Rightarrow T_s(r,\theta) \quad tq \quad T_s(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=-T_a(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}$$

$$T_a(r,\theta)=\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\begin{cases}\sum\limits_{n=0,+\infty}P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)P_n(-Cos(\theta))\left(\frac{r}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)^n & r<\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}\\ \sum\limits_{n=0,+\infty}P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)P_n(-Cos(\theta))\left(\frac{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}{r}\right)^{n+1} & r>\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}\end{cases}$$

$$T_s(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\ \{A(\tau)Cos(\tau\, Log(r))+B(\tau)Sin(\tau\, Log(r))\}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}$$

$$A(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\ \frac{f(r)}{\sqrt{r}}Cos(\tau\, Log(r)) \quad B(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\ \frac{f(r)}{\sqrt{r}}Sin(\tau\, Log(r))$$

$$\Rightarrow f(r)=T_s(r,\theta_0)=-\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\begin{cases}\sum\limits_{n=0,+\infty}P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)P_n(-Cos(\theta_0))\left(\frac{r}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)^n & r<\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}\\ \sum\limits_{n=0,+\infty}P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)P_n(-Cos(\theta_0))\left(\frac{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}{r}\right)^{n+1} & r>\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}\end{cases}$$

Par transposition du signe des cosinus, les expressions A(τ) et B(τ) se calculent de la même manière et la solution s'écrit, en considérant za pour sa valeur algébrique sur l'axe z:

$$T(r,\theta)=\left\{\begin{array}{l}\frac{2\pi q l_{ra}}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\left[\begin{array}{ll}\sum\limits_{n=0,+\infty}P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)P_n(-Cos(\theta))\left(\frac{r}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)^n & r<\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}\\ \sum\limits_{n=0,+\infty}P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)P_n(-Cos(\theta))\left(\frac{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}{r}\right)^{n+1} & r>\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}\end{array}\right]-\\ -\frac{8ql_{ra}}{\left(l_{ra}^2+z_a^2\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{r}}\sum\limits_{n=0,+\infty}\left[\begin{array}{l}(2n+1)P_n\left(-\frac{z_a}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)P_n(-Cos(\theta_0))\times\\ \times\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{\sqrt{l_{ra}^2+z_a^2}}\right)\right)}{(2n+1)^2+4\tau^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

On traite le cas où za=0 plus loin en retrouvant la même expression en posant za=0 et en notant que la sommation ne se fait que sur les indices paires.

Exemple : Problème du potentiel dans tout l'espace extérieur à un cône infini, anneau fin de rayon lra avec une densité linéique de charge q, placé perpendiculairement au cône à l'origine, entourant le sommet du cône conducteur d'angle θ0, de valeur nulle pour le potentiel à la surface du cône.

C'est un cas particulier d'un calcul déjà réalisé. Pour les mêmes raisons la densité de charge linéique reste identique dans l'anneau une fois en présence du cône conducteur. Le potentiel total est l'ajout du potentiel précédemment calculé avec un potentiel dit de surface tel que le potentiel résultant est nul sur le cône conducteur. Il vient :

$$T(r,\theta)=T_a(r,\theta)+T_s(r,\theta) \qquad T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \Rightarrow T_s(r,\theta) \quad tq \quad T_s(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=-T_a(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}$$

$$T_s(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{+\infty} d\tau\,\{A(\tau)Cos(\tau\,Log(r))+B(\tau)Sin(\tau\,Log(r))\}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))\Big/P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))$$

$$A(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dr\,\frac{f(r)}{\sqrt{r}}Cos(\tau\,Log(r)) \quad B(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dr\,\frac{f(r)}{\sqrt{r}}Sin(\tau\,Log(r))$$

$$T_a(r,\vartheta)=2\pi\,q\left\{\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{l_{ra}}\right)^{2n}P_{2n}(Cos(\vartheta)) \quad r<l_{ra} \qquad \sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{l_{ra}}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(Cos(\vartheta)) \quad r>l_{ra}\right.$$

$$\Rightarrow f(r)=T_s(r,\theta_0)=-2\pi q\begin{cases}\sum_{n=0,+\infty}P_{2n}(0)P_{2n}(Cos(\theta_0))\left(\frac{r}{l_{ra}}\right)^{2n} & r<l_{ra}\\ \sum_{n=0,+\infty}P_{2n}(0)P_{2n}(Cos(\theta_0))\left(\frac{l_{ra}}{r}\right)^{2n+1} & r>l_{ra}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\tau)=-2q\sum_{n=0,+\infty}P_{2n}(0)P_{2n}(Cos(\theta_0))\left\{\frac{1}{l_{ra}^{2n}}\int_0^{l_{ra}}dr\,Cos(\tau\,Log(r))r^{2n-\frac{1}{2}}+l_{ra}^{2n+1}\int_{l_{ra}}^{+\infty}dr\,\frac{Cos(\tau\,Log(r))}{r^{2n+\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$\Rightarrow B(\tau)=-2q\sum_{n=0,+\infty}P_{2n}(0)P_{2n}(Cos(\theta_0))\left\{\frac{1}{l_{ra}^{2n}}\int_0^{l_{ra}}dr\,Sin(\tau\,Log(r))r^{2n-\frac{1}{2}}+l_{ra}^{2n+1}\int_{l_{ra}}^{+\infty}dr\,\frac{Sin(\tau\,Log(r))}{r^{2n+\frac{3}{2}}}\right\}$$

Calculons les intégrales ci dessus, et nous avons

$$\begin{cases}\int_0^{l_{ra}}dr\,r^{2n-\frac{1}{2}}Cos(\tau\,Log(r))=\dfrac{2l_{ra}^{\frac{4n+1}{2}}\{(4n+1)Cos(\tau\,Log(l_{ra}))+2\tau\,Sin(\tau\,Log(l_{ra}))\}}{(4n+1)^2+4\tau^2}\\ \int_0^{l_{ra}}dr\,r^{2n-\frac{1}{2}}Sin(\tau\,Log(r))=\dfrac{2l_{ra}^{\frac{4n+1}{2}}\{(4n+1)Sin(\tau\,Log(l_{ra}))-2\tau\,Cos(\tau\,Log(l_{ra}))\}}{(4n+1)^2+4\tau^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\int_{l_{ra}}^{+\infty}dr\,r^{-\left(2n+\frac{3}{2}\right)}Cos(\tau\,Log(r))=\dfrac{2l_{ra}^{-\frac{4n+1}{2}}\{(4n+1)Cos(\tau\,Log(l_{ra}))-2\tau\,Sin(\tau\,Log(l_{ra}))\}}{(4n+1)^2+4\tau^2}\\ \int_{l_{ra}}^{+\infty}dr\,r^{-\left(2n+\frac{3}{2}\right)}Sin(\tau\,Log(r))=\dfrac{2l_{ra}^{-\frac{4n+1}{2}}\{(4n+1)Sin(\tau\,Log(l_{ra}))+2\tau\,Cos(\tau\,Log(l_{ra}))\}}{(4n+1)^2+4\tau^2}\end{cases}$$

.

Avec l'expression intermédiaire :

$$\frac{1}{{l_{ra}}^{2n}}\int_0^{l_{ra}} dr\ Cos(\tau\ Log(r))r^{2n-\frac{1}{2}} + {l_{ra}}^{2n+1}\int_{l_{ra}}^{+\infty} dr\frac{Cos(\tau\ Log(r))}{r^{2n+\frac{3}{2}}} = \frac{4(4n+1)l_{ra}^{\frac{1}{2}}Cos(\tau\ Log(l_{ra}))}{(4n+1)^2+4\tau^2}$$

$$\frac{1}{{l_{ra}}^{2n}}\int_0^{l_{ra}} dr\ Sin(\tau\ Log(r))r^{2n-\frac{1}{2}} + {l_{ra}}^{2n+1}\int_{l_{ra}}^{+\infty} dr\frac{Sin(\tau\ Log(r))}{r^{2n+\frac{3}{2}}} = \frac{4(4n+1)l_{ra}^{\frac{1}{2}}Sin(\tau\ Log(l_{ra}))}{(4n+1)^2+4\tau^2}.$$

Il vient la solution du problème extérieur :

$$T(r,\theta)=\left\{\begin{array}{l} 2\pi\, q\left\{\begin{array}{ll}\sum\limits_{n=0,+\infty} P_{2n}(0)\left(\frac{r}{l_{ra}}\right)^{2n} P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r<l_{ra}\\ \sum\limits_{n=0,+\infty} P_{2n}(0)\left(\frac{l_{ra}}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(Cos(\vartheta)) & r>l_{ra}\end{array}\right\} - \\ -\frac{8q\sqrt{l_{ra}}}{\sqrt{r}}\sum\limits_{n=0,+\infty}(4n+1)P_{2n}(0)P_{2n}(Cos(\theta_0))\int_0^{+\infty} d\tau\left[\frac{Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{l_{ra}}\right)\right)}{(4n+1)^2+4\tau^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}\right]\end{array}\right\}.$$

Exemple : Problème extérieur, disque fin de rayon ld avec une densité surfacique de charge q constante placé à l'origine des coordonnées dans le plan x,y, potentiel dans tout l'espace, application de la construction précédente :

Pour calculer le potentiel du disque sur l'axe z, on intègre la solution élémentaire de Poisson sur le plan du disque (double intégrale en coordonnées polaires du disque) :

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ *distance entre le point sur l'axe z* $(\mathbf{r})$ *et un point sur le disque* $(\mathbf{r}')$

$$T(z=r) = q\oint_S\frac{ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = q\oint\frac{ds'}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \qquad ds' = \rho d\vartheta$$

$$T(z=r) = q\int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^{l_d}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = 2\pi q\left(\sqrt{{l_d}^2+z^2}-|z|\right) = 2\pi q\left(\frac{{l_d}^2}{|z|+\sqrt{{l_d}^2+z^2}}\right) \quad T(z=0)=2\pi q l_d.$$

Pour un disque annulaire de rayon ld1et ld2, on a : $T(z=r) = 2\pi q\left(\sqrt{{l_{d2}}^2+z^2}-\sqrt{{l_{d1}}^2+z^2}\right)$.

Développons la solution selon la distance z=r sur l'axe z>0, sachant que la fonction est paire.

$$z>l_d \quad x=\frac{l_d}{z} \Rightarrow T(z=r) = 2\pi q\frac{{l_d}^2}{z+\sqrt{{l_d}^2+z^2}} = 2\pi q l_d\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$$z<l_d \quad x=\frac{z}{l_d} \Rightarrow T(z=r) = 2\pi q\frac{l_d}{\frac{z}{l_d}+\sqrt{1+\left(\frac{z}{l_d}\right)^2}} = 2\pi q l_d\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \qquad T(z=l_d)=\frac{2\pi q l_d}{1+\sqrt{2}}$$

$$De\ plus \quad \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!x^{2n}}{2^{2n+1}n!(n+1)!} \Rightarrow \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!x^{2n+1}}{2^{2n+1}n!(n+1)!}$$

$$De\ plus \quad \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = 1-x+x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!x^{2n}}{2^{2n+1}n!(n+1)!} = 1-x+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!x^{2n+2}}{2^{2n+1}n!(n+1)!}.$$

La solution dans tout l'espace s'écrit:

$$\begin{cases} T(r,0) = 2\pi q l_d \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!} \left(\dfrac{l_d}{r}\right)^{2n+1} & pour \quad r > l_d \\ T(r,0) = 2\pi q l_d \left(1 - \left(\dfrac{r}{l_d}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!} \left(\dfrac{r}{l_d}\right)^{2n+2}\right) & pour \quad r < l_d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(r,\vartheta) = 2\pi q l_d \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!} \left(\dfrac{l_d}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(Cos(\vartheta)) & pour \quad r > l_d \\ T(r,\vartheta) = 2\pi q l_d \left(1 - \left(\dfrac{r}{l_d}\right) Cos(\vartheta) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!} \left(\dfrac{r}{l_d}\right)^{2n+2} P_{2n+2}(Cos(\vartheta))\right) & pour \quad r < l_d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(r,\vartheta) = 2\pi q l_d \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_{2n}(0)}{2(n+1)} \left(\dfrac{l_d}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(Cos(\vartheta)) & pour \quad r > l_d \\ T(r,\vartheta) = 2\pi q l_d \left(1 - \left(\dfrac{r}{l_d}\right) Cos(\vartheta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_{2n}(0)}{2(n+1)} \left(\dfrac{r}{l_d}\right)^{2n+2} P_{2n+2}(Cos(\vartheta))\right) & pour \quad r < l_d \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} Q = \pi q l_d^{\,2} \\ charge\ totale \end{array} \Rightarrow \begin{cases} T(r,\vartheta) = 2Q \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!} \left(\dfrac{l_d}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(Cos(\vartheta)) & pour \quad r > l_d \\ T(r,\vartheta) = \dfrac{2Q}{l_d} \left(1 - \left(\dfrac{r}{l_d}\right) Cos(\vartheta) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!} \left(\dfrac{r}{l_d}\right)^{2n+2} P_{2n+2}(Cos(\vartheta))\right) & pour \quad r < l_d \end{cases}$$

Sur le plan z=0, la valeur du potentiel est donné par :

$$\begin{cases} T\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi q l_d \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(P_{2n}(0))^2}{(n+1)} \left(\dfrac{l_d}{r}\right)^{2n+1} & pour \quad r > l_d \\ T\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\pi q l_d \left(1 - \dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_{2n}(0) P_{2n+2}(0)}{(n+1)} \left(\dfrac{r}{l_d}\right)^{2n+2}\right) & pour \quad r < l_d \end{cases}$$

.

Pour r=ld, il vient :

$$T\left(l_d,\frac{\pi}{2}\right) = \pi q l_d \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(P_{2n}(0))^2}{(n+1)} \quad De\ plus \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(P_{2n}(0))^2}{(n+1)} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow T\left(l_d,\frac{\pi}{2}\right) = \pi q l_d \frac{4}{\pi} = 4 q l_d$$

$$Egalement \quad T\left(l_d,\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi q l_d \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_{2n}(0) P_{2n+2}(0)}{(n+1)}\right) \quad De\ plus \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_{2n}(0) P_{2n+2}(0)}{(n+1)} = -\frac{2(\pi-2)}{\pi} = \frac{4}{\pi} - 2$$

$$\Rightarrow T\left(l_d,\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi q l_d \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi} - 2\right)\right) = 2\pi q l_d \left(\frac{2}{\pi}\right) = 4 q l_d \qquad et\ T\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi q l_d$$

.

Le potentiel n'est donc pas infini à la surface du disque.

Exemple : Problème intérieur/extérieur, hémisphère portant une densité surfacique de charge constante, application de la construction précédente :

Pour calculer le potentiel à l'extérieur de l'hémisphère sur l'axe z, on intègre la solution élémentaire de Poisson sur la surface de l'hémisphère (double intégrale en coordonnées sphérique) :

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ *distance entre le point sur l'axe z* $(\mathbf{r})$ *et un point dans l'hémisphère* $(\mathbf{r})$

$$T(z=r)=q\oint_S\frac{ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=q\oint\frac{ds'}{\sqrt{l_h^2+z^2-2l_hzCos(\vartheta-\vartheta')}}\quad ds'=l_h^2Sin(\vartheta)d\vartheta d\varphi\quad \vartheta'=0$$

$$T(z=r)=2\pi q l_h^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Sin(\vartheta)d\vartheta}{\sqrt{l_h^2+z^2-2l_hzCos(\vartheta)}}=2\pi q l_h^2\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{l_h^2+z^2-2l_hz\xi}}$$

$$T(z=r)=\frac{2\pi q l_h^2}{l_hz}\left[-\sqrt{l_h^2+z^2-2l_hz\xi}\right]_0^1=\frac{2\pi q l_h}{z}\left[\sqrt{l_h^2+z^2-2l_hz\xi}\right]_1^0$$

$$\Rightarrow T(z=r)=\frac{2\pi q l_h}{z}\left[\sqrt{l_h^2+z^2}-\sqrt{(l_h-z)^2}\right]=\frac{2\pi q l_h}{z}\begin{cases}\sqrt{l_h^2+z^2}-(l_h-z) & z<l_h\\ \sqrt{l_h^2+z^2}-(z-l_h) & z>l_h\end{cases}$$

$$\Rightarrow T(z=r)=\frac{2\pi q l_h}{z}\begin{cases}l_h\left\{\sqrt{1+\frac{z^2}{l_h^2}}+\left(\frac{z}{l_h}-1\right)\right\} & |z|<l_h\\ -z\left\{\sqrt{1+\frac{l_h^2}{z^2}}+\left(\frac{l_h}{z}-1\right)\right\} & |z|>l_h\quad z<0\\ z\left\{\sqrt{1+\frac{l_h^2}{z^2}}+\left(\frac{l_h}{z}-1\right)\right\} & z>l_h\end{cases}$$

$$\sqrt{1+x^2}=1+x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}x^{2n}\Rightarrow\sqrt{1+x^2}+x-1=x+x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}x^{2n}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{x}=1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}x^{2n+1}$$

La solution dans tout l'espace est donc :

$$\begin{cases}T(r,0)=2\pi q l_h\left\{1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}\left(\frac{r}{l_h}\right)^{2n+1}\right\} & pour\quad r<l_h\\ T(r,0)=2\pi q l_h\left\{\frac{l_h}{r}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}\left(\frac{l_h}{r}\right)^{2n+2}\right\} & pour\quad r>l_h\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}T(r,\vartheta)=2\pi q l_h\left\{1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}\left(\frac{r}{l_h}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(Cos(\vartheta))\right\} & pour\quad r<l_h\\ T(r,\vartheta)=2\pi q l_h\left\{\frac{l_h}{r}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}\left(\frac{l_h}{r}\right)^{2n+2}P_{2n+1}(Cos(\vartheta))\right\} & pour\quad r>l_h\end{cases}$$

$$\begin{matrix}Q=2\pi q l_h^2\\ charge\ totale\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}T(r,\vartheta)=\frac{Q}{l_h}\left\{1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}\left(\frac{r}{l_h}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(Cos(\vartheta))\right\} & pour\quad r<l_h\\ T(r,\vartheta)=Q\left\{\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}\left(\frac{l_h}{r}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(Cos(\vartheta))\right\} & pour\quad r>l_h\end{cases}$$

Exemple : Problème intérieur/extérieur, hémisphère portant une densité volumique de charge constante, application de la construction précédente :

Pour calculer le potentiel sur l'axe z de l'hémisphère, on intègre la solution élémentaire de Poisson sur le volume de l'hémisphère (triple intégrale en coordonnées sphérique) :

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ *distance entre le point sur l'axe z* $(\mathbf{r})$ *et un point dans l'hémisphère* $(\mathbf{r})$

$$T(z=r)=\rho\oint_V \frac{dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=q\oint \frac{dv'}{\sqrt{r^2+z^2-2rzCos(\vartheta-\vartheta')}} \quad dv'=r^2 Sin(\vartheta)d\vartheta d\varphi \quad \vartheta'=0$$

$$T(z=r)=2\pi\rho\int_0^{l_h} dr\, r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Sin(\vartheta)d\vartheta}{\sqrt{r^2+z^2-2rzCos(\vartheta)}}=2\pi\rho\int_0^{l_h} dr\, r^2\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{r^2+z^2-2rz\xi}}$$

$$T(z=r)=\frac{2\pi\rho}{z}\int_0^{l_h} dr\, r\left[-\sqrt{r^2+z^2-2rz\xi}\right]_0^1=\frac{2\pi\rho}{z}\int_0^{l_h} dr\, r\left[\sqrt{r^2+z^2}-|r-z|\right]$$

$$T(z=r)=\frac{2\pi\rho}{z}\left\{\frac{\left(l_h^{\,2}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-|z|^3}{3}-\int_0^{l_h} dr\, r|r-z|\right\}=\frac{2\pi\rho}{3z}\left\{\left(l_h^{\,2}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-|z|^3-3\int_0^{l_h} dr\, r|r-z|\right\}$$

$$Si\ z>l_h \Rightarrow T(z=r)=\frac{2\pi\rho}{3z}\left\{\left(l_h^{\,2}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-z^3+l_h^{\,3}-\frac{3l_h^{\,2}z}{2}\right\}$$

$$Si\ z\in[0,l_h]\Rightarrow T(z=r)=\frac{2\pi\rho}{3z}\left\{\left(l_h^{\,2}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-|z|^3+l_h^{\,3}-3\left(\int_0^z dr\, r(z-r)+\int_z^{l_h} dr\, r(r-z)\right)\right\}$$

$$\Rightarrow T(z=r)=\frac{2\pi\rho}{3z}\left\{\left(l_h^{\,2}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-2z^3-l_h^{\,3}+\frac{3l_h^{\,2}z}{2}\right\}$$

$$Si\ z<0\Rightarrow T(z=r)=\frac{2\pi\rho}{3z}\left\{\left(l_h^{\,2}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}+z^3-3\int_0^{l_h} dr\, r(r-z)\right\}=\frac{2\pi\rho}{3z}\left\{\left(l_h^{\,2}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}+z^3-l_h^{\,3}+\frac{3l_h^{\,2}z}{2}\right\}.$$

La solution dans tout l'espace pour z> lh devient :

$$Si\ z > l_h \quad x = \frac{l_h}{z} \Rightarrow T(x) = \frac{2\pi\rho z^2}{3}\left\{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - 1 + x^3 - \frac{3x^2}{2}\right\} = \frac{2\pi\rho {l_h}^2}{3x^2}\left\{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - 1 + x^3 - \frac{3x^2}{2}\right\}$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}x^{2n} \Rightarrow x\sqrt{1+x^2} = x + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}x^{2n+3}$$

$$\Rightarrow \int_0^x dy y\sqrt{1+y^2} = \left[\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+4}$$

$$\Rightarrow \left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3x^2}{2} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+4}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1 - \frac{3x^2}{2} + x^3}{x^2} = x\left(1 + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+1}\right)$$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{2\pi\rho {l_h}^2}{3}\left(x + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+2}\right)$$

$$\Rightarrow T(r,0) = \frac{2\pi\rho {l_h}^2}{3}\left(\frac{l_h}{r} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}\left(\frac{l_h}{r}\right)^{2n+2}\right)$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta) = \frac{2\pi\rho {l_h}^2}{3}\left(\frac{l_h}{r} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}\left(\frac{l_h}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(Cos(\vartheta))\right)$$

.

La solution dans tout l'espace pour z€[0,lh] est :

$$Si\ z \in [0, l_h] \quad x = \frac{z}{l_h} \Rightarrow T(x) = \frac{2\pi\rho {l_h}^2}{3}\left\{\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1 + \frac{3x}{2} - 2x^3}{x}\right\}$$

$$Comme \quad \left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3x^2}{2} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+4}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2x^3 - 1 + \frac{3x}{2}}{x} = \frac{3}{2} + \frac{3x}{2} - 2x^2 + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+3}$$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{2\pi\rho {l_h}^2}{3}\left\{\frac{3}{2} + \frac{3x}{2} - 2x^2 + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+3}\right\}$$

$$\Rightarrow T(r,0) = \frac{2\pi\rho {l_h}^2}{3}\left\{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\frac{r}{l_h} - 2\left(\frac{r}{l_h}\right)^2 + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}\left(\frac{r}{l_h}\right)^{2n+3}\right\}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta) = \frac{2\pi\rho {l_h}^2}{3}\left\{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\frac{r}{l_h}Cos(\vartheta) - 2\left(\frac{r}{l_h}\right)^2 P_2(Cos(\vartheta)) + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}\left(\frac{r}{l_h}\right)^{2n+3} P_{2n+3}(Cos(\vartheta))\right\}$$

.

La solution dans tout l'espace pour z€[-lh,0] devient :

$$T(z)=\frac{2\pi\rho}{3z}\left\{\left(l_h^{\,2}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}+z^3-l_h^{\,3}+\frac{3l_h^{\,2}z}{2}\right\}$$

$$Si\ z<0\quad et\quad |z|<l_h\quad x=-\frac{z}{l_h}\Rightarrow T(x)=-\frac{2\pi\rho l_h^{\,2}}{3}\left\{\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-x^3-1-\frac{3x}{2}}{x}\right\}$$

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3x^2}{2}+3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+4}$$

$$\Rightarrow\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-x^3-1-\frac{3x}{2}}{x}=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}x-x^2+3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+3}$$

$$T(r,0)=-\frac{2\pi\rho l_h^{\,2}}{3}\left\{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\frac{r}{l_h}-\left(\frac{r}{l_h}\right)^2+3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}\left(\frac{r}{l_h}\right)^{2n+3}\right\}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta)=\frac{2\pi\rho l_h^{\,2}}{3}\left\{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{r}{l_h}Cos(\vartheta)+\left(\frac{r}{l_h}\right)^2P_2(Cos(\vartheta))-3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}\left(\frac{r}{l_h}\right)^{2n+3}P_{2n+3}(Cos(\vartheta))\right\}$$

La solution dans tout l'espace pour z<-lh devient :

$$T(z)=\frac{2\pi\rho}{3z}\left\{\left(l_h^{\,2}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}+z^3-l_h^{\,3}+\frac{3l_h^{\,2}z}{2}\right\}=\frac{2\pi\rho}{3z}\left\{-z^3\left(\left(\frac{l_h}{z}\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+z^3-l_h^{\,3}+\frac{3l_h^{\,2}z}{2}\right\}$$

$$=-\frac{2\pi\rho x}{3l_h}\left\{-z^3\left(\left(\frac{l_h}{z}\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+z^3+z^3\left(-\frac{l_h}{z}\right)^3+z^3\frac{3}{2}\left(\frac{l_h}{z}\right)^2\right\}=\frac{2\pi\rho z^2}{3}\left\{-\left(\left(\frac{l_h}{z}\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+1+\left(-\frac{l_h}{z}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{l_h}{z}\right)^2\right\}$$

$$Si\ z<0\quad et\quad |z|>l_h\quad x=-\frac{l_h}{z}\Rightarrow T(x)=\frac{2\pi\rho l_h^{\,2}}{3}\left\{\frac{-\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+1+x^3+\frac{3x^2}{2}}{x^2}\right\}$$

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3x^2}{2}+3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+4}$$

$$\Rightarrow\frac{-\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}+1+x^3+\frac{3x^2}{2}}{x^2}=x-3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}x^{2n+2}$$

$$T(r,0)=\frac{2\pi\rho l_h^{\,2}}{3}\left\{\frac{l_h}{r}-3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}\left(\frac{l_h}{r}\right)^{2n+2}\right\}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta)=\frac{2\pi\rho l_h^{\,2}}{3}\left\{\frac{l_h}{r}-3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}\left(\frac{l_h}{r}\right)^{2n+2}P_{2n+1}(Cos(\vartheta))\right\}$$

Le problème des deux sphères de rayon a de potentiel opposé placées à distance l'une de l'autre ou d'une sphère de potentiel V0 placée au dessus d'un plan conducteur à la hauteur zs en présence également d'un champs électrique E0 constant selon l'axe z.

Ce problème est idéalement résolu en utilisant les coordonnées orthogonales bisphérique, toutefois on trouve dans la littérature des auteurs l'ayant résolu en coordonnées sphériques en obtenant toutefois une expression bien moins simple, que voici. Soit donc deux sphères placées de part et d'autre de l'axe z. Par principe de superposition on peut admettre que la solution est construite à partir d'une composante dont l'origine des coordonnées se trouve sur la sphère supérieure, une composante liée à l'origine de la sphère inférieure et une composante liée au champ électrique :

$$T(r,\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A_nP_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_nP_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{\,n+1}}-E_0z \quad z=rCos(\vartheta)$$

$$r_s=|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_{s0}| \quad r_i=|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_{i0}| \quad \vec{\mathbf{r}} \quad \textit{point d'observation}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{s0} \quad \vec{\mathbf{r}}_{i0} \quad \textit{centres respectifs des sphère supérieure et inférieure}$$

Le système de coordonnées sphériques peut être soit sur le plan médian , soit au centre de l'une ou l'autre des sphères. Selon le plan médian Les deux sphères sont donc à la distance 2zs l'une de l'autre. Dans ces conditions on a :

$$\vec{\mathbf{r}}=(x,y,z)=(x,y,rCos(\vartheta)) \quad \vec{\mathbf{r}}_{i0}=(0,0,-z_s) \quad \vec{\mathbf{r}}_{s0}=(0,0,z_s)$$

$$r_i=|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_{i0}|=\sqrt{r^2+z_s^{\,2}-2\vec{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{r}}_{i0}}=\sqrt{r^2+z_s^{\,2}+2z_sz}=\sqrt{r^2+z_s^{\,2}+2z_srCos(\vartheta)}$$

$$r_s=|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_{s0}|=\sqrt{r^2+z_s^{\,2}-2\vec{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{r}}_{s0}}=\sqrt{r^2+z_s^{\,2}-2z_sz}=\sqrt{r^2+z_s^{\,2}-2z_srCos(\vartheta)}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A_nP_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_nP_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{\,n+1}}-E_0rCos(\vartheta)$$

Selon des coordonnées sphériques basées sur le plan médian, les deux sphères sont de potentiels opposés et le champ est une fonction impaire de z. Il en résulte que le potentiel résultant dans tous l'espace est également une fonction impaire de z. De même selon la géométrie du problème, la solution est tant une fonction de r et ϑ, qu'une fonction de coordonnées cylindriques axi-symétriques, soit ρ et z, et nous pouvons écrire :

$T(r,\vartheta)=T(\rho,z) \quad r=\sqrt{\rho^2+z^2} \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow T(\rho,-z)=-T(\rho,z)$. *Cela entraîne une condition d'annulation sur le plan médian. Les deux conditions aux limites et la condition d'annulation sont:*

$$T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_s}=V_0 \quad T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_i}=-V_0 \quad T(r,\vartheta)\big|_{z=0}=0$$

$$\vec{\mathbf{r}}_s \quad \vec{\mathbf{r}}_i \quad \textit{deux points respectifs des sphères supérieure et inférieure}$$

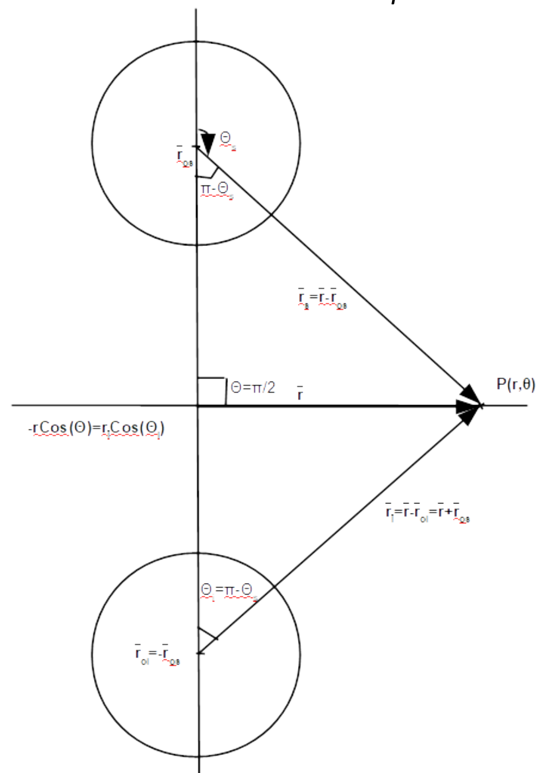
Sur le plan médian, z=0 où la condition d'annulation s'applique, les angles sont liés par la relation :

$$z=0\Rightarrow\begin{cases}\vartheta_i=\pi-\vartheta_s\\ r_s=r_i\end{cases}\Rightarrow Cos(\vartheta_s)=-Cos(\vartheta_i)$$

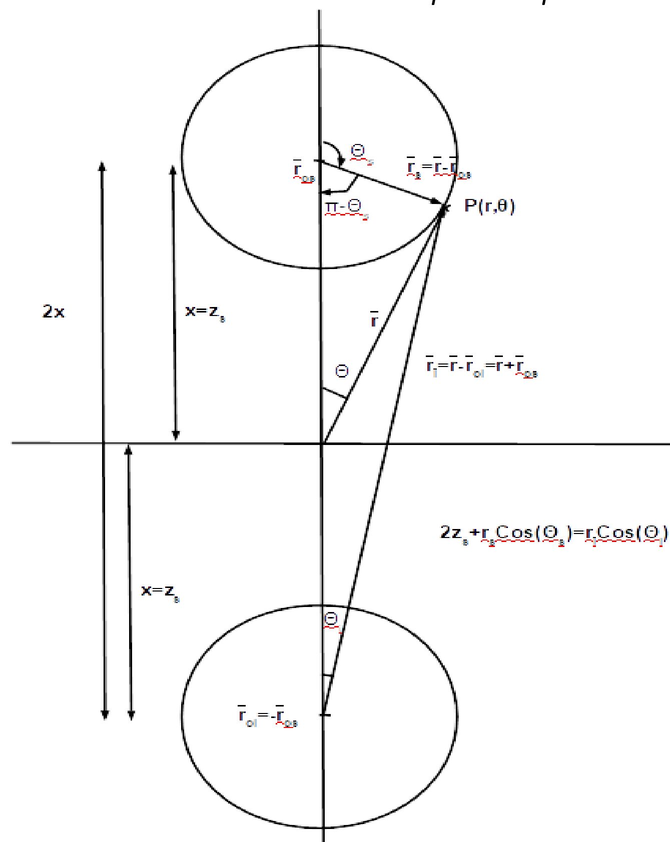
$$T(r,\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{r_s^{\,n+1}}\left(A_n+(-1)^nB_n\right)P_n(Cos(\vartheta_s))=0\Rightarrow A_n=-(-1)^nB_n$$

Comment s'applique les deux conditions aux limites.

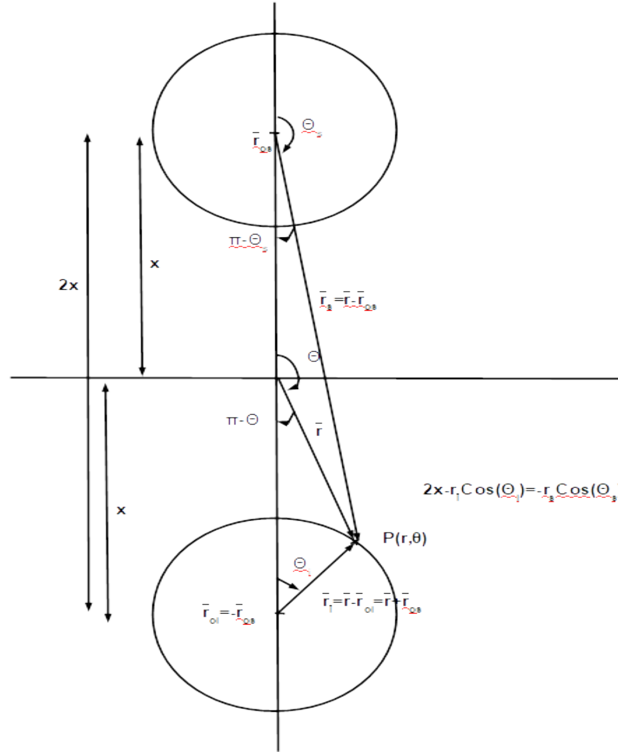
Condition d'annulation sur le plan médian



Conditions aux limites sur la sphère supérieure



Conditions aux limites sur la sphère inférieure



Lorsque le système de coordonnées est basé sur la sphère supérieure , on a :

$$\vec{\mathbf{r}} = (x,y,z) = (x,y,rCos(\vartheta)) \quad \vec{\mathbf{r}}_{s0} = (0,0,0) \quad \vec{\mathbf{r}}_{i0} = (0,0,-2z_s)$$

$$r_i = |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{i0}| = \sqrt{r^2 + 4{z_s}^2 - 2\vec{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{r}}_{i0}} = \sqrt{r^2 + 4{z_s}^2 + 4z_s z} = \sqrt{r^2 + 4{z_s}^2 + 4z_s rCos(\vartheta)}$$

$$r_s = |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{s0}| = r \quad \vartheta_s = \vartheta \Rightarrow T(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n P_n(Cos(\vartheta))}{r^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{n+1}} - E_0(z_s + rCos(\vartheta))$$

Et dans ce cas pour la condition aux limites supérieure on utilise le développement des termes de la sphère inférieure :

$$\left.\begin{array}{l} 2z_s + r_s Cos(\vartheta_s) = r_i Cos(\vartheta_i) \\ x = 2z_s \quad R_+ = r_i \quad 2z_s > r_s \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{n+1}} = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{r_s^l}{(2z_s)^{l+n+1}} P_l(Cos(\vartheta_s))$$

Lorsque le système de coordonnées est basé sur la sphère inférieure , on a :

$$\vec{\mathbf{r}} = (x,y,z) = (x,y,rCos(\vartheta)) \quad \vec{\mathbf{r}}_{s0} = (0,0,2z_s) \quad \vec{\mathbf{r}}_{i0} = (0,0,0)$$

$$r_s = |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{s0}| = \sqrt{r^2 + 4{z_s}^2 - 2\vec{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{r}}_{s0}} = \sqrt{r^2 + 4{z_s}^2 - 4z_s z} = \sqrt{r^2 + 4{z_s}^2 - 4z_s rCos(\vartheta)}$$

$$r_i = |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{i0}| = r \quad \vartheta_i = \vartheta \Rightarrow T(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n P_n(Cos(\vartheta))}{r^{n+1}} - E_0(z_s + rCos(\vartheta))$$

Et dans ce cas pour la condition aux limites inférieure on utilise le développement des termes de la sphère supérieure :

$$\left.\begin{array}{l} 2z_s - r_i Cos(\vartheta_i) = -r_s Cos(\vartheta_s) \\ x = 2z_s \quad R_- = r_s \quad 2z_s > r_s \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{n+1}} = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{r_i^l}{(2z_s)^{l+n+1}} P_l(Cos(\vartheta_i))$$

.

Traitons la condition aux limites de la sphère supérieure . En transposant ce développement dans l'expression de la solution pour la condition aux limites supérieure, il vient :

$$z = z_s + rCos(\vartheta_s)$$

$$T(r,\vartheta)\Big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_s} = V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left\{A_n \frac{P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}} + B_n \sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r_s^{\,l}}{(2z_s)^{l+n+1}} P_l(Cos(\vartheta_s))\right\} - E_0(z_s + rCos(\vartheta_s))$$

En inversant l'ordre de sommation

$$T(r,\vartheta)\Big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_s} = V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta))\left\{A_n \frac{1}{r_s^{\,n+1}} + \sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^n B_l \frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r_s^{\,n}}{(2z_s)^{l+n+1}}\right\} - E_0(z_s + r_s P_1(Cos(\vartheta)))$$

Rayon de la sphère $a \Rightarrow r_s = a$

$$\Rightarrow V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta))\left\{A_n \frac{1}{a^{n+1}} + \sum_{l=0}^{+\infty} A_l(-1)^{n+l+1}\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}}\right\} - E_0(z_s + aP_1(Cos(\vartheta)))$$

Orthogonalité des polynômes de Legendre

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{l+1}}{(2z_s)^{l+1}} A_l = V_0 + E_0 z_s \quad pour\ n=0 \\ A_1 \dfrac{1}{a^2} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l (l+1)\frac{a}{(2z_s)^{l+2}} A_l = E_0 a \quad pour\ n=1 \\ A_n \dfrac{1}{a^{n+1}} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^{n+l+1}\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} A_l = 0 \quad pour\ n>1 \end{cases}$$

En posant $U_n = \dfrac{A_n}{a^{n+1}} \quad \lambda = \dfrac{a}{2z_s}$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_0 + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^{l+1}\lambda^{l+1}U_l = V_0 + E_0 z_s \quad pour\ n=0 \\ U_1 + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l (l+1)\lambda^{l+2}U_l = E_0 a \quad pour\ n=1 \\ U_n + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^{n+l+1}\frac{(l+n)!}{l!n!}\lambda^{l+n+1}U_l = 0 \quad pour\ n>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 - \lambda\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l \lambda^l U_l = V_0 + E_0 z_s \quad pour\ n=0 \\ U_1 - \lambda\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^{l+1}(l+1)\lambda^{l+1}U_l = E_0 a \quad pour\ n=1 \\ U_n - \lambda\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^{l+n}\frac{(l+n)!}{l!n!}\lambda^{l+n}U_l = 0 \quad pour\ n>1 \end{cases}$$

Ce système d'équation linéaire peut s'écrire de manière matricielle :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = [G_{n,l}] \quad G_{n,l} = (-1)^{l+n}\frac{(l+n)!}{l!n!}\lambda^{l+n} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_0 + E_0 z_s \\ E_0 a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1} \quad matrice\ identité$$

$$\Rightarrow (\mathbf{1} - \lambda\mathbf{G}).\mathbf{U} = \mathbf{V}$$

$$\Rightarrow \mathbf{U} = (\mathbf{1} - \lambda\mathbf{G})^{-1}.\mathbf{V} \qquad Avec \quad U_n = \frac{A_n}{a^{n+1}} \quad \lambda = \frac{a}{2z_s}$$

L'inversion de la matrice peut être approchée par un développement sur la variable λ lorsque λ<1 :

$$(\mathbf{1} - \lambda\mathbf{G})^{-1} \approx \mathbf{1} + \sum_{p=1}^{p=\infty}\lambda^p \mathbf{G}^p \quad \mathbf{G}^p = \underbrace{\mathbf{G}.\mathbf{G}.\cdots\mathbf{G}}_{p\ fois}$$

La condition aux limites sur la sphère supérieure s'écrit :

$$V_0 + E_0 z_s = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta))\left\{U_n + \sum_{l=0}^{+\infty} U_l(-1)^{n+l+1}\frac{(l+n)!}{l!n!}\lambda^{l+n+1}\right\} - E_0 a P_1(Cos(\vartheta))$$

Pour la condition aux limites sur la sphère inférieure, on utilise le développement :

$$\left.\begin{array}{l} 2z_s - r_i Cos(\vartheta_i) = -r_s Cos(\vartheta_s) \\ x = 2z_s \quad R_- = r_s \quad 2z_s > r_s \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{n+1}} = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{r_i^l}{(2z_s)^{l+n+1}} P_l(Cos(\vartheta_i))$$

$$T(r,\vartheta)\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = -V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ A_n \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{r_i^l}{(2z_s)^{l+n+1}} P_l(Cos(\vartheta_i)) + B_n \frac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{n+1}} \right\} - E_0(-z_s - r_i Cos(\vartheta_i))$$

Comme $A_n = -(-1)^n B_n$ *rayon de la sphère* $r_i = a$

$$\Rightarrow -V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ -B_n \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a^l}{(2z_s)^{l+n+1}} P_l(Cos(\vartheta_i)) + B_n \frac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{a^{n+1}} \right\} - E_0(-z_s - aCos(\vartheta_i))$$

$$\Rightarrow V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ B_n \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a^l}{(2z_s)^{l+n+1}} P_l(Cos(\vartheta_i)) - B_n \frac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{a^{n+1}} \right\} - E_0(z_s + aCos(\vartheta_i))$$

$$\Rightarrow V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_i)) \left\{ \sum_{l=0}^{+\infty} B_l \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} - \frac{B_n}{a^{n+1}} \right\} - E_0(z_s + aCos(\vartheta_i))$$

$$\Rightarrow V_0 + E_0 z_s = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_i)) \left\{ \sum_{l=0}^{+\infty} B_l \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} - \frac{B_n}{a^{n+1}} \right\} - E_0 aCos(\vartheta_i)$$

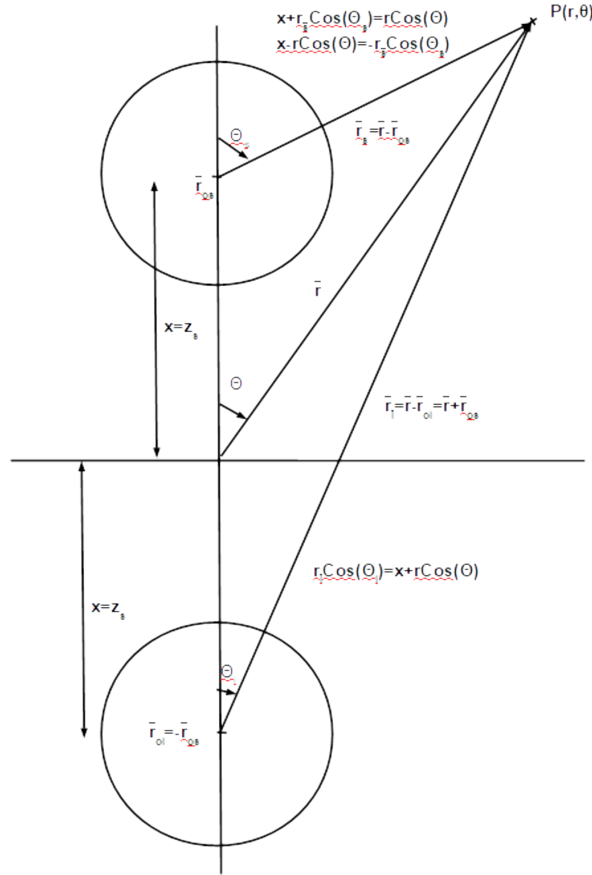
Orthogonalité des polynômes de Legendre

$$\Rightarrow \begin{cases} -B_0 \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{(2z_s)^{l+1}} B_l = V_0 + E_0 z_s \Leftrightarrow A_0 \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{(2z_s)^{l+1}} A_l = V_0 + E_0 z_s \quad pour\ n=0 \\ -B_1 \dfrac{1}{a^2} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} (l+1) \frac{a}{(2z_s)^{l+2}} B_l = E_0 a \Leftrightarrow -A_1 \dfrac{1}{a^2} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} (l+1)(-1)^{l+1} \frac{a}{(2z_s)^{l+2}} A_l = E_0 a \quad pour\ n=1 \\ -\dfrac{B_n}{a^{n+1}} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} B_l = 0 \Leftrightarrow A_n \dfrac{1}{a^{n+1}} (-1)^n + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} (-1)^{l+1} A_l = 0 \quad pour\ n>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{(2z_s)^{l+1}} A_l = V_0 + E_0 z_s \quad pour\ n=0 \\ A_1 \dfrac{1}{a^2} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} (l+1)(-1)^l \frac{a}{(2z_s)^{l+2}} A_l = E_0 a \quad pour\ n=1 \\ A_n \dfrac{1}{a^{n+1}} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} (-1)^{l+n+1} A_l = 0 \quad pour\ n>1 \end{cases}$$

Système linéaire identique à celui de la condition aux limites de la sphère supérieure

Sphères dans les coordonnées origines sur le plan conducteur médian :



Une fois ce système linéaire inversé, on peut aussi exprimer la solution du problème, en prenant comme référence du système sphérique de la sphère supérieure:

$$r = r_s \quad \vartheta = \vartheta_s \quad r_i = \sqrt{r^2 + 4z_s^{\,2} + 4z_s rCos(\vartheta)}$$

$$T(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n P_n(Cos(\vartheta))}{r^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A_n P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{n+1}} - E_0(z_s + rCos(\vartheta))$$

$$2z_s + rCos(\vartheta) = r_i Cos(\vartheta_i) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{n+1}} = \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{r^l}{(2z_s)^{l+n+1}} P_l(Cos(\vartheta)) & r < 2z_s \\ \dfrac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{n+1}} = \displaystyle\sum_{l=n}^{+\infty} (-1)^{l+n} \frac{l!}{n!(l-n)!} \frac{(2z_s)^{l-n}}{r^{l+1}} P_l(Cos(\vartheta)) & r > 2z_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta) = \left\{ \begin{array}{l} -E_0(z_s + rCos(\vartheta)) + \\ + \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \frac{P_n(Cos(\vartheta))}{r^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^{l+n} \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{r^l}{(2z_s)^{l+n+1}} P_l(Cos(\vartheta)) & r < 2z_s \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \frac{P_n(Cos(\vartheta))}{r^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sum_{l=n}^{+\infty} (-1)^l \frac{l!}{n!(l-n)!} \frac{(2z_s)^{l-n}}{r^{l+1}} P_l(Cos(\vartheta)) & r > 2z_s \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$A_n = U_n a^{n+1} \Rightarrow T(r,\vartheta) = \left\{ \begin{array}{l} -E_0(z_s + rCos(\vartheta)) + \\ + \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} U_n - \left(\frac{r}{a}\right)^n \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^{l+n} U_l \frac{(l+n)!}{l!n!} \lambda^{l+n+1} \right\} P_n(Cos(\vartheta)) & r < 2z_s \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left\{ U_n - (-1)^n \sum_{l=0}^{l=n} U_l \frac{n!}{l!(n-l)!} \lambda^{n-l} \right\} P_n(Cos(\vartheta)) & r > 2z_s \end{cases} \end{array} \right\}.$$

On peut aussi exprimer la solution du problème, en prenant comme référence du système sphérique le plan conducteur médian (voir ci-dessus) :

$$T(r,\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A_nP_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A_nP_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{\,n+1}}-E_0rCos(\vartheta)$$

$$r_i=\sqrt{r^2+z_s^{\,2}+2z_srCos(\vartheta)}\quad r_s=\sqrt{r^2+z_s^{\,2}-2z_srCos(\vartheta)}=\sqrt{r^2+z_s^{\,2}+2z_srCos(\pi-\vartheta)}$$

$$z_s+rCos(\vartheta)=r_iCos(\vartheta_i)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{\,n+1}}=\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{z_s^{\,l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r<z_s\\ \dfrac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{\,n+1}}=\displaystyle\sum_{l=n}^{+\infty}(-1)^{l+n}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{z_s^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r>z_s\end{cases}$$

$$z_s+rCos(\pi-\vartheta)=r_sCos(\pi-\vartheta_s)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{P_n(Cos(\pi-\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}}=\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{z_s^{\,l+n+1}}P_l(Cos(\pi-\vartheta)) & r<z_s\\ \dfrac{P_n(Cos(\pi-\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}}=\displaystyle\sum_{l=n}^{+\infty}(-1)^{l+n}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{z_s^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\pi-\vartheta)) & r>z_s\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}}=\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{z_s^{\,l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r<z_s\\ \dfrac{P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}}=\displaystyle\sum_{l=n}^{+\infty}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{z_s^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r>z_s\end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta)=\left\{\begin{array}{l}-E_0rCos(\vartheta)+\\ +\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{z_s^{\,l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta))-\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^{l+n}\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{z_s^{\,l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r<z_s\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sum_{l=n}^{+\infty}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{z_s^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta))-\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sum_{l=n}^{+\infty}(-1)^l\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{z_s^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r>z_s\end{cases}\end{array}\right\}$$

En inversant l'ordre des sommations puis les indices n et l, il vient :

$$\text{Inversion de l'ordre de sommation puis } n \leftrightarrow l$$

$$T(r,\vartheta)=\begin{cases} -E_0 r Cos(\vartheta)+ \\ +\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n P_n(Cos(\vartheta))\left(1-(-1)^n\right)\sum_{l=0}^{+\infty} A_l(-1)^l \dfrac{(l+n)!}{l!n!}\dfrac{1}{z_s^{\,l+n+1}} & r<z_s \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_n(Cos(\vartheta))}{r^{n+1}}\left(1-(-1)^n\right)\sum_{l=0}^{l=n} A_l \dfrac{n!}{l!(n-l)!} z_s^{\,n-l} & r>z_s \end{cases} \end{cases}$$

$$T(r,\vartheta)=\begin{cases} -E_0 r Cos(\vartheta)+ \\ +\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{r}{a}\right)^n P_n(Cos(\vartheta))\left(1-(-1)^n\right)\sum_{l=0}^{+\infty} U_l(-1)^l \dfrac{(l+n)!}{l!n!}\left(\dfrac{a}{z_s}\right)^{l+n+1} & r<z_s \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(Cos(\vartheta))\left(1-(-1)^n\right)\sum_{l=0}^{l=n} U_l \dfrac{n!}{l!(n-l)!}\left(\dfrac{z_s}{a}\right)^{n-l} & r>z_s \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta)=\begin{cases} -E_0 r Cos(\vartheta)+ \\ +2\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(Cos(\vartheta))\sum_{l=0}^{+\infty} U_l(-1)^l \dfrac{(l+2n+1)!}{l!(2n+1)!}\left(\dfrac{a}{z_s}\right)^{l+n+1} & r<z_s \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{a}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(Cos(\vartheta))\sum_{l=0}^{l=2n+1} U_l \dfrac{(2n+1)!}{l!(2n+1-l)!}\left(\dfrac{z_s}{a}\right)^{2n+1-l} & r>z_s \end{cases} \end{cases}.$$

On retrouve bien l'annulation du potentiel sur le plan conducteur (z=0).

En coordonnées bi-sphérique, le système des deux sphères correspond à deux iso-surfaces :

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=c\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)} \quad z=c\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)} \quad c=\sqrt{z_s^{\,2}-a^2}$$

$$\eta=\eta_0 \Rightarrow x^2+y^2+\left(z\pm cCotanh(\eta_0)\right)^2=\frac{c^2}{Sinh^2(\eta_0)} \to 2 \text{ Sphères disjointes} \quad \begin{cases} S_1\left(c\dfrac{Cosh(\eta_0)}{Sinh(\eta_0)},\dfrac{c}{Sinh(\eta_0)}\right) \\ S_2\left(-c\dfrac{Cosh(\eta_0)}{Sinh(\eta_0)},\dfrac{c}{Sinh(\eta_0)}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_s=c\frac{Cosh(\eta_0)}{Sinh(\eta_0)}=aCosh(\eta_0) \quad et \quad \begin{cases} \eta\in[-\eta_0,\eta_0] \quad \text{espace entre les deux sphères} \\ \eta\in[-\infty,-\eta_0] \quad (x,y,z)\in S_2\left(-c\dfrac{Cosh(\eta_0)}{Sinh(\eta_0)},\dfrac{c}{Sinh(\eta_0)}\right) \quad \lim_{\eta\to-\infty} z=-c \\ \eta\in[\eta_0,+\infty] \quad (x,y,z)\in S_1\left(c\dfrac{Cosh(\eta_0)}{Sinh(\eta_0)},\dfrac{c}{Sinh(\eta_0)}\right) \quad \lim_{\eta\to+\infty} z=c \end{cases}.$$

Et la solution en coordonnées bi-sphériques s'écrit pour deux sphères portées au potentiel V1 et V2 sans champ électrique extérieur :

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=c\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\quad z=c\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\quad c=\sqrt{{z_s}^2-a^2}\quad \eta_0=ArcCotanh\left(\frac{z_s}{c}\right)=ArcCosh\left(\frac{z_s}{a}\right)$$

$$T(\eta,\vartheta)=\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta)}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0}\left\{\frac{V_1+V_2}{2}\frac{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)}{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)}+\frac{V_1-V_2}{2}\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)}\right\}P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow T(z)=T(\eta,0)=\sqrt{2Cosh(\eta)-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0}\left\{V_1\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta+\eta_0)\right)}{Sinh\left(2\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)}+V_2\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_0-\eta)\right)}{Sinh\left(2\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)}\right\}\times\right]$$

$$Axe\ z\quad \vartheta\in\{0,\pi\}\Rightarrow z=c\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)\mp 1}\Rightarrow\begin{cases}z\in[-z_s+a,z_s-a]\Rightarrow T(z)=T(\eta,\pi)\quad \eta=2ArcTanh\left(\frac{z}{a}\right)\\ z\notin[-z_s+a,z_s-a]\Rightarrow T(z)=T(\eta,0)\quad \eta=2ArcCotanh\left(\frac{z}{a}\right)\end{cases}$$

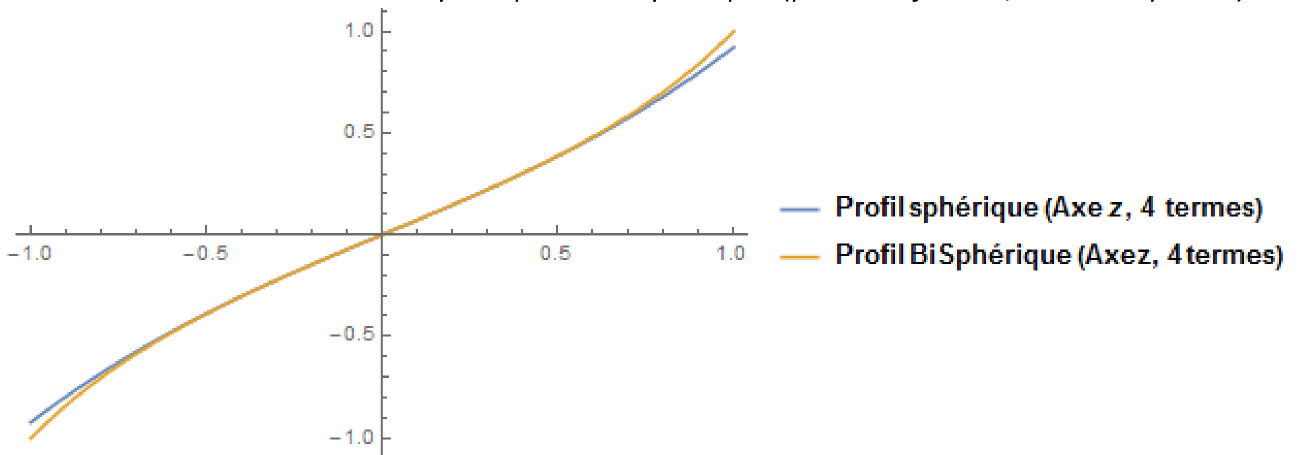
$$z\in[-z_s+a,z_s-a]\quad \eta=2ArcTanh\left(\frac{z}{c}\right)$$

$$\Rightarrow T(z)=T(\eta,\pi)=2Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0}\left\{\frac{V_1+V_2}{2}\frac{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)}{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)}+\frac{V_1-V_2}{2}\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)}\right\}$$

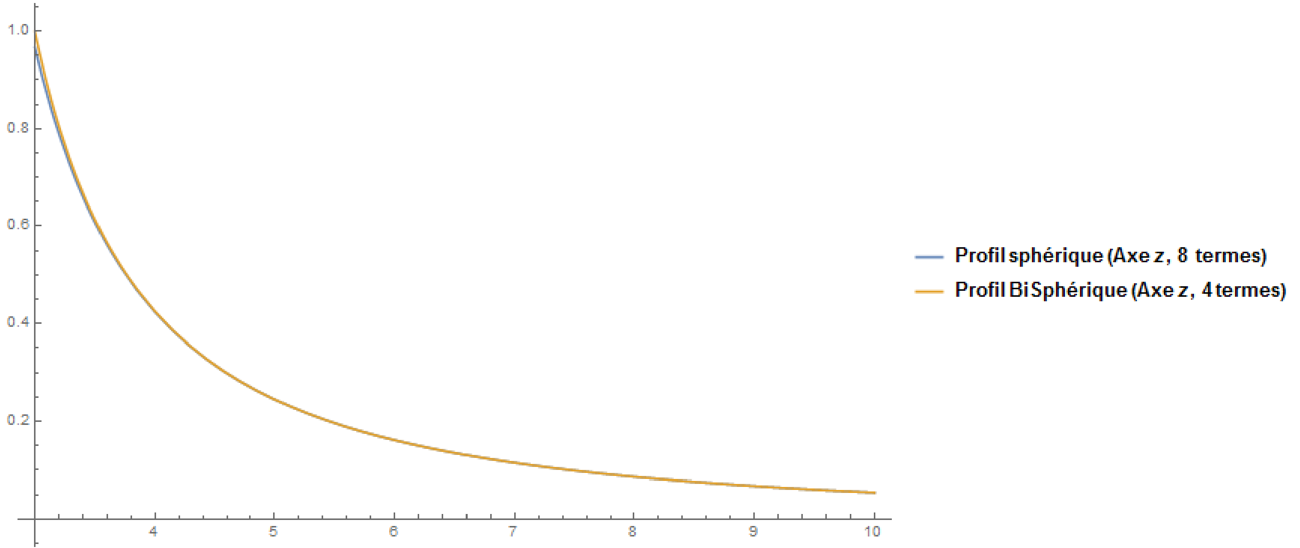
$$z\notin[-z_s+a,z_s-a]\quad \eta=2ArcCotanh\left(\frac{z}{c}\right)$$

$$\Rightarrow T(z)=T(\eta,0)=2Sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0}\left\{\frac{V_1+V_2}{2}\frac{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)}{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)}+\frac{V_1-V_2}{2}\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)}\right\}$$

A titre d'illustration voici les deux profils sur l'axe z dans l'espace entre les deux sphères calculés avec la solution en coordonnées sphériques et bi-sphérique (potentiel fixé à 1,-1 sur les sphères):



Et de même les profils « au dessus » des deux sphères. Pour les coordonnées sphériques, il faut au moins 8 termes pour obtenir une approximation suffisante tandis qu'en coordonnées bisphériques seuls 4 suffisent (potentiel fixé à 1,-1 sur les sphères):



On obtient la formule du développement des puissances inverses de la distance de la manière suivante en utilisant la fonction génératrice des polynômes de Legendre. Le premier développement est valable pour la condition aux limites sur la surface de la sphère supérieure :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2-2xrCos(\vartheta)}}=\begin{cases}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{r^l}{x^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r<x\\ \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{x^l}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r>x\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2+2xrCos(\vartheta)}}=\begin{cases}\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{r^l}{x^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r<x\\ \sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{x^l}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r>x\end{cases}$$

$$Posons\quad\begin{cases}R_+=\sqrt{x^2+r^2+2xrCos(\vartheta)}\\ x+rCos(\vartheta)=R_+Cos(\psi)\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2+2xrCos(\vartheta)}}=\frac{1}{R_+}$$

$$On\ montre\ que\ \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{R_+}\right)=(-1)^n n!\frac{P_n(Cos(\psi))}{R_+^{\,n+1}}\qquad\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^{l+1}}\right)=(-1)^n n!\frac{(n+l)!}{n!l!}\frac{1}{x^{n+l+1}}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^l)=\frac{l!}{(l-n)!}x^{l-n}=n!\frac{l!}{n!(l-n)!}x^{l-n}\Rightarrow\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{R_+}\right)=\begin{cases}\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l r^l\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^{l+1}}\right)P_l(Cos(\vartheta)) & r<x\\ \sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{1}{r^{l+1}}\frac{d^n}{dx^n}(x^l)P_l(Cos(\vartheta)) & r>x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(-1)^n n!\frac{P_n(Cos(\psi))}{R_+^{\,n+1}}=\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l r^l(-1)^n n!\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{1}{x^{l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r<x\\ (-1)^n n!\frac{P_n(Cos(\psi))}{R_+^{\,n+1}}=\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{1}{r^{l+1}}n!\frac{l!}{n!(l-n)!}x^{l-n}P_l(Cos(\vartheta)) & r>x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{P_n(Cos(\psi))}{R_+^{\,n+1}}=\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{x^{l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r<x\\ \frac{P_n(Cos(\psi))}{R_+^{\,n+1}}=\sum_{l=n}^{+\infty}(-1)^{l+n}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{x^{l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r>x\end{cases}$$

Le deuxième développement est valable pour la condition aux limites sur la surface de la sphère inférieure. Il revêt une forme similaire :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2-2xrCos(\vartheta)}}=\begin{cases}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{r^l}{x^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r<x\\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^l}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r>x\end{cases}$$

$$Posons\quad \begin{cases}R_-=\sqrt{x^2+r^2-2xrCos(\vartheta)}\\ x+rCos(\pi-\vartheta)=R_-Cos(\pi-\psi)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{P_n(Cos(\pi-\psi))}{R_-^{\ n+1}}=\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{x^{l+n+1}}P_l(Cos(\pi-\vartheta)) & r<x\\ \frac{P_n(Cos(\pi-\psi))}{R_-^{\ n+1}}=\sum_{l=n}^{+\infty}(-1)^{l+n}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{x^{l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\pi-\vartheta)) & r>x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(-1)^n\frac{P_n(Cos(\psi))}{R_-^{\ n+1}}=\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{x^{l+n+1}}(-1)^lP_l(Cos(\vartheta)) & r<x\\ (-1)^n\frac{P_n(Cos(\psi))}{R_-^{\ n+1}}=\sum_{l=n}^{+\infty}(-1)^{l+n}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{x^{l-n}}{r^{l+1}}(-1)^lP_l(Cos(\vartheta)) & r>x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{P_n(Cos(\psi))}{R_-^{\ n+1}}=\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{x^{l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r<x\\ \frac{P_n(Cos(\psi))}{R_-^{\ n+1}}=\sum_{l=n}^{+\infty}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{x^{l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) & r>x\end{cases}$$

.

Le problème des deux sphères de rayon a de même potentiel V0 placées à distance 2zs l'une de l'autre.

Au vu de la symétrie du problème aux limites, la solution doit être paire en z :

$$T(r,\vartheta)=T(\rho,z) \quad r=\sqrt{\rho^2+z^2} \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow T(\rho,-z)=T(\rho,z).$$

La solution se développe d'après les contributions des sphères supérieure et inférieure :

$$T(r,\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A_nP_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_nP_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{n+1}}$$

$$r_s=|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_{s0}| \quad r_i=|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_{i0}| \quad \vec{\mathbf{r}} \quad \text{point d'observation}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{s0} \quad \vec{\mathbf{r}}_{i0} \quad \text{centres respectifs des sphère supérieure et inférieure}.$$

On rappelle que l'on a les relations suivantes pour un système de coordonnées basé sur le plan médian :

$$\vec{\mathbf{r}}=(x,y,z)=(x,y,rCos(\vartheta)) \quad \vec{\mathbf{r}}_{i0}=(0,0,-z_s) \quad \vec{\mathbf{r}}_{s0}=(0,0,z_s)$$

$$r_i=|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_{i0}|=\sqrt{r^2+z_s^2-2\vec{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{r}}_{i0}}=\sqrt{r^2+z_s^2+2z_sz}=\sqrt{r^2+z_s^2+2z_srCos(\vartheta)}$$

$$r_s=|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_{s0}|=\sqrt{r^2+z_s^2-2\vec{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{r}}_{s0}}=\sqrt{r^2+z_s^2-2z_sz}=\sqrt{r^2+z_s^2-2z_srCos(\vartheta)}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A_nP_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_nP_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{n+1}}$$

Les deux conditions aux limites sont :

$$T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_s}=V_0 \quad T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_i}=V_0$$

$$\vec{\mathbf{r}}_s \quad \vec{\mathbf{r}}_i \quad \text{deux points respectifs des sphères supérieure et inférieure}.$$

La condition aux limites supérieure donne l'expression suivante :

$$T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_s}=V_0=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{A_n\frac{P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{n+1}}+B_n\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r_s^{\,l}}{(2z_s)^{l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta_s))\right\}$$

$$\text{En inversant l'ordre de sommation} \quad \text{et} \quad r_s=a$$

$$T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_s}=V_0=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(Cos(\vartheta_s))\left\{\frac{A_n}{a^{n+1}}+\sum_{l=0}^{+\infty}B_l(-1)^n\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}}\right\}.$$

La condition aux limites inférieure donne l'expression suivante :

$$T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_i}=V_0=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{A_n\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r_i^{\,l}}{(2z_s)^{l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta_i))+B_n\frac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{n+1}}\right\}$$

$$\text{En inversant l'ordre de sommation} \quad \text{et} \quad r_i=a$$

$$T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_i}=V_0=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(Cos(\vartheta_i))\left\{\sum_{l=0}^{+\infty}A_l(-1)^l\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}}+B_n\frac{1}{a^{n+1}}\right\}.$$

Si maintenant l'on suppose que les coefficients sont liés par la relation suivante, alors les deux expressions précédentes conduisent au même système linéaire :

$$A_n = (-1)^n B_n \Rightarrow V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_i))\left\{\sum_{l=0}^{+\infty} A_l(-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} + B_n\frac{1}{a^{n+1}}\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_i))\left\{\sum_{l=0}^{+\infty} A_l(-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} + A_n(-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n P_n(Cos(\vartheta_i))\left\{\sum_{l=0}^{+\infty} A_l(-1)^{l+n} \frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} + A_n\frac{1}{a^{n+1}}\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n P_n(Cos(\vartheta_i))\left\{\sum_{l=0}^{+\infty} B_l(-1)^{n} \frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} + A_n\frac{1}{a^{n+1}}\right\}$$

$$V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_s))\left\{\frac{A_n}{a^{n+1}} + \sum_{l=0}^{+\infty} B_l(-1)^{n} \frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}}\right\}$$

.

Autrement dit, il s'agit de montrer que la relation $A_n = (-1)^n B_n$ *découle de la propriété de parité. Développons des expressions de la solution à rechercher selon le système de coordonnées du plan médian :*

$$T(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A_nP_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_nP_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{\,n+1}}$$

$$\begin{cases} r_i = \sqrt{r^2 + z_s^{\,2} + 2z_s rCos(\vartheta)} \\ z_s + rCos(\vartheta) = r_iCos(\vartheta_i) \end{cases} \quad \begin{cases} r_s = \sqrt{r^2 + z_s^{\,2} - 2z_s rCos(\vartheta)} = \sqrt{r^2 + z_s^{\,2} + 2z_s rCos(\pi-\vartheta)} \\ z_s - rCos(\vartheta) = -r_sCos(\vartheta_s) \Leftrightarrow z_s + rCos(\pi-\vartheta) = r_sCos(\pi-\vartheta_s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}} = \sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(l+n)!}{l!n!}\dfrac{r^l}{z_s^{\,l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta)) \quad r < z_s \\ \dfrac{P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{\,n+1}} = \sum_{l=n}^{+\infty}\dfrac{l!}{n!(l-n)!}\dfrac{z_s^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) \quad r > z_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{\,n+1}} = \sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\dfrac{(l+n)!}{l!n!}\dfrac{r^l}{z_s^{\,l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta)) \quad r < z_s \\ \dfrac{P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{\,n+1}} = \sum_{l=n}^{+\infty}(-1)^{l+n}\dfrac{l!}{n!(l-n)!}\dfrac{z_s^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) \quad r > z_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(l+n)!}{l!n!}\dfrac{r^l}{z_s^{\,l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta)) + \sum_{n=0}^{+\infty}B_n\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\dfrac{(l+n)!}{l!n!}\dfrac{r^l}{z_s^{\,l+n+1}}P_l(Cos(\vartheta)) \quad r < z_s \\ \sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sum_{l=n}^{+\infty}\dfrac{l!}{n!(l-n)!}\dfrac{z_s^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) + \sum_{n=0}^{+\infty}B_n\sum_{l=n}^{+\infty}(-1)^{l+n}\dfrac{l!}{n!(l-n)!}\dfrac{z_s^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l(Cos(\vartheta)) \quad r > z_s \end{cases}$$

En inversant l'ordre de sommation puis $l \leftrightarrow n$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty}P_n(Cos(\vartheta))\sum_{l=0}^{+\infty}\left\{A_l(-1)^l + B_l(-1)^n\right\}\dfrac{(l+n)!}{l!n!}\dfrac{r^n}{z_s^{\,l+n+1}} \quad r < z_s \\ \sum_{n=0}^{+\infty}P_n(Cos(\vartheta))\sum_{l=0}^{l=n}\left\{A_l + B_l(-1)^{l+n}\right\}\dfrac{n!}{l!(n-l)!}\dfrac{z_s^{\,n-l}}{r^{n+1}} \quad r > z_s \end{cases}$$

La propriété de parité exigent que seuls les termes paires sont non nuls, il vient alors :

$$Si\ n = 2m+1\ alors\ A_l(-1)^l + B_l(-1)^n = 0 \Rightarrow A_l(-1)^l - B_l = 0 \Rightarrow A_l(-1)^l = B_l$$.

Ce qui démontre l'assertion et prouve en même temps que les deux conditions aux limites sur les sphères supérieure et inférieure ne conduisent qu'à une seul système d'équations linéaires.

Revenons donc à ce système linéaire :

$$V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_i)) \left\{ \sum_{l=0}^{+\infty} A_l (-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} + A_n (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \right\}$$

$$\Rightarrow V_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_i))(-1)^n \left\{ \sum_{l=0}^{+\infty} A_l (-1)^{l+n} \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a^n}{(2z_s)^{l+n+1}} + A_n \frac{1}{a^{n+1}} \right\} \text{ Posons } \quad U_n = A_n \frac{1}{a^{n+1}} \qquad \lambda = \frac{a}{2z_s}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{A_l}{a^{l+1}} (-1)^l \frac{a^{l+1}}{(2z_s)^{l+1}} = V_0 & n = 0 \\ A_n \dfrac{1}{a^{n+1}} + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{A_l}{a^{l+1}} (-1)^{l+n} \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a^{l+n+1}}{(2z_s)^{l+n+1}} = 0 & n > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_0 + \lambda \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \lambda^l U_l = V_0 & n = 0 \\ U_n + \lambda \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^{l+n} \frac{(l+n)!}{l!n!} \lambda^{l+n} U_l = 0 & n > 0 \end{cases}$$

$$\text{Posons} \quad \mathbf{U} = [U_n]^T \quad \mathbf{G} = [G_{nl}] \quad G_{nl} = (-1)^{l+n} \lambda^{l+n} \frac{(l+n)!}{l!n!} \quad \mathbf{1} = [\delta_{nl}] \quad \mathbf{V} = [V_0, 0, \cdots, 0]^T$$

$$\Rightarrow (\mathbf{1} + \lambda \mathbf{G}).\mathbf{U} = \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{U} = (\mathbf{1} + \lambda \mathbf{G})^{-1}.\mathbf{V}$$

L'inversion de la matrice peut être approchée par un développement sur la variable λ lorsque λ<1 :

$$(\mathbf{1} + \lambda \mathbf{G})^{-1} \approx \mathbf{1} + \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \lambda^p \mathbf{G}^p \quad \mathbf{G}^p = \underbrace{\mathbf{G}.\mathbf{G}.\cdots\mathbf{G}}_{p \text{ fois}}$$

. Et la solution s'exprime dans le système de coordonnées sphériques du plan médian, comme suit :

$$T(r,\vartheta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta)) \sum_{l=0}^{+\infty} \{1 + (-1)^n\} A_l (-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{r^n}{z_s^{\,l+n+1}} & r < z_s \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta)) \sum_{l=0}^{l=n} \{1 + (-1)^n\} A_l \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{z_s^{\,n-l}}{r^{n+1}} & r > z_s \end{cases}$$

$$T(r,\vartheta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(Cos(\vartheta)) \sum_{l=0}^{+\infty} \{1 + (-1)^n\} U_l (-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!} \left(\frac{a}{z_s}\right)^{l+n+1} & r < z_s \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(Cos(\vartheta)) \sum_{l=0}^{l=n} \{1 + (-1)^n\} U_l \frac{n!}{l!(n-l)!} \left(\frac{z_s}{a}\right)^{n-l} & r > z_s \end{cases}.$$

Cette solution est à comparer avec la solution en coordonnées bi-sphériques, dont on rappelle dans ce cas l'expression :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = c \frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)} \quad z = c \frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)} \quad c = \sqrt{z_s^{\,2} - a^2} \quad \eta_0 = ArcCotanh\left(\frac{z_s}{c}\right) = ArcCosh\left(\frac{z_s}{a}\right)$$

$$T(\eta,\vartheta) = V_0 \sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\vartheta)} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0} \frac{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)}{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)} P_n(Cos(\vartheta))$$

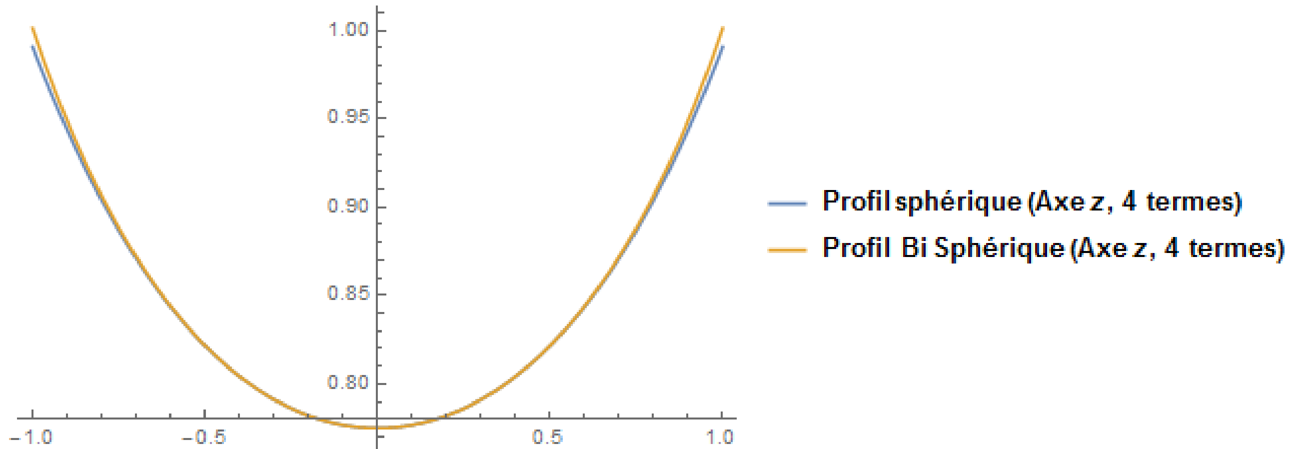
$$\text{Axe } z \quad \vartheta \in \{0,\pi\} \Rightarrow z = c \frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta) \mp 1} \Rightarrow \begin{cases} z \in [-z_s + a, z_s - a] \Rightarrow T(z) = T(\eta,\pi) \\ z \notin [-z_s + a, z_s - a] \Rightarrow T(z) = T(\eta,0) \end{cases}$$

$$z \in [-z_s + a, z_s - a] \quad \eta = 2ArcTanh\left(\frac{z}{c}\right) \Rightarrow T(z) = T(\eta,\pi) = 2V_0 Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0} \frac{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)}{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)}$$

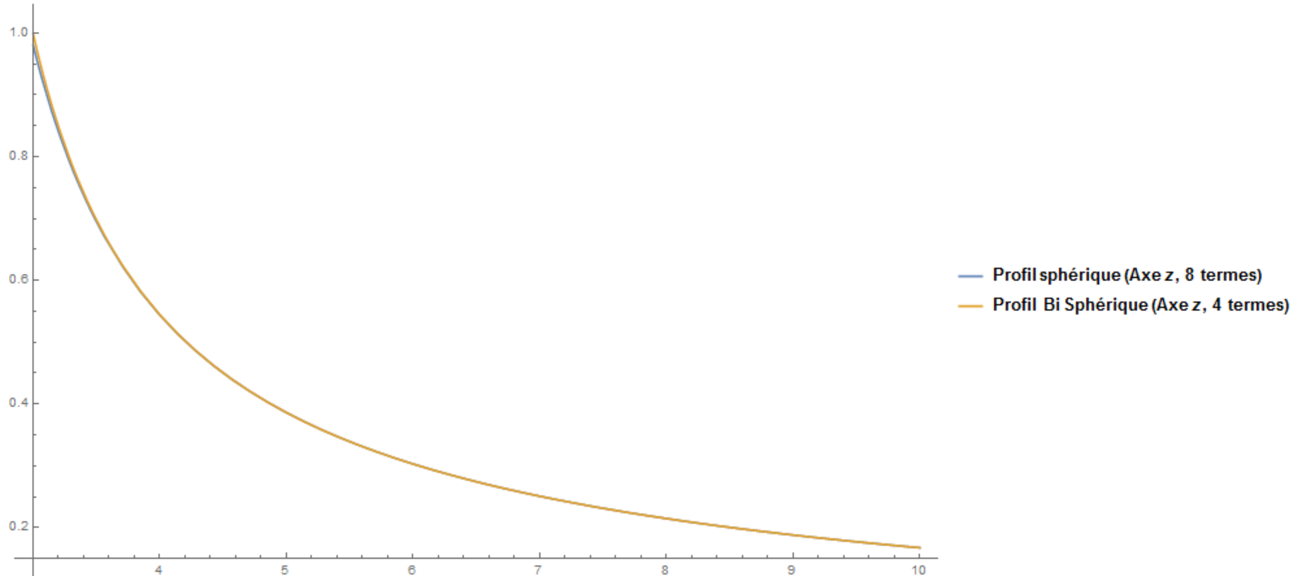
$$z \notin [-z_s + a, z_s - a] \quad \eta = 2ArcCotanh\left(\frac{z}{c}\right) \Rightarrow T(z) = T(\eta,0) = 2V_0 Sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0} \frac{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)}{Cosh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0\right)}$$

.

A titre d'illustration voici les deux profils sur l'axe z dans l'espace entre les deux sphères calculés avec la solution en coordonnées sphériques et bi-sphérique (potentiel fixé à 1 et 1 sur les sphères):



Et de même les profils « au dessus » des deux sphères. Pour les coordonnées sphériques, il faut au moins 8 termes pour obtenir une approximation suffisante tandis qu'en coordonnées bisphériques seuls 4 suffisent (potentiel fixé à 1 et 1 sur les sphères):



Le problème des deux sphères de rayon a1 et a2 et de potentiel V1 et V2 placées à distance 2zs l'une de l'autre.

Commençons par la résolution du problème en coordonnées bi-sphériques.

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = c\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)} \quad z = c\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}$$

$$Si\ \eta_1 < 0 \quad et \quad \eta_2 > 0 \quad sphères\ disjointes$$

$$\eta = \eta_{1,2} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z+cCotanh(\eta_1))^2 = \dfrac{c^2}{Sinh^2(\eta_1)} \\ x^2+y^2+(z-cCotanh(\eta_2))^2 = \dfrac{c^2}{Sinh^2(\eta_2)} \end{cases} \rightarrow Sphères \quad \begin{cases} S_1\left(-c\dfrac{Cosh(\eta_1)}{Sinh(\eta_1)}, \dfrac{c}{Sinh(\eta_1)}\right) \\ S_2\left(c\dfrac{Cosh(\eta_2)}{Sinh(\eta_2)}, \dfrac{c}{Sinh(\eta_2)}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta \in [-\eta_1, \eta_2] \quad espace\ entre\ les\ deux\ sphères \\ \eta \in [-\infty, -\eta_1] \quad (x,y,z) \in S_1\left(-c\dfrac{Cosh(\eta_1)}{Sinh(\eta_1)}, \dfrac{c}{Sinh(\eta_1)}\right) \quad \underset{\eta\to-\infty}{Lim}\ z = -c \quad (0,0,-c) \in S_1 \\ \eta \in [\eta_2, +\infty] \quad (x,y,z) \in S_2\left(c\dfrac{Cosh(\eta_2)}{Sinh(\eta_2)}, \dfrac{c}{Sinh(\eta_2)}\right) \quad \underset{\eta\to+\infty}{Lim}\ z = c \quad (0,0,c) \in S_2 \end{cases}$$

$$Axe\ z \Rightarrow \vartheta \in \{0,\pi\} \quad \begin{cases} z \in [-c,c] \Rightarrow \vartheta = \pi \quad et \quad \eta = 2ArcTanh\left(\dfrac{z}{c}\right) \\ z \notin [-c,c] \Rightarrow \vartheta = 0 \quad et \quad \eta = 2ArcCotanh\left(\dfrac{z}{c}\right) \end{cases}$$

.

Les paramètres du système de coordonnées sont calculés comme suit à l'aide de la distance entre les sphères et leur rayon respectif :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = c\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)} \quad z = c\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)}$$

$$a_1 = \frac{c}{Sinh(\eta_1)} \quad a_2 = \frac{c}{Sinh(\eta_2)} \quad 2z_s = c\left(\frac{Cosh(\eta_1)}{Sinh(\eta_1)} + \frac{Cosh(\eta_2)}{Sinh(\eta_2)}\right)$$

$$Cosh(\eta_1) = \frac{\sqrt{c^2 + a_1^2}}{a_1} \quad Cosh(\eta_2) = \frac{\sqrt{c^2 + a_2^2}}{a_2}$$

$$2z_s = (a_1 Cosh(\eta_1) + a_2 Cosh(\eta_2)) = \sqrt{c^2 + a_1^2} + \sqrt{c^2 + a_2^2}$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{a_1^4 + (a_2^4 - 4z_s^2)^2 - 2a_1^2(a_2^2 + 4z_s^2)}{16z_s^2} \Rightarrow \begin{cases} c^2 + a_1^2 = \dfrac{(a_1^2 - a_2^2 + 4z_s^2)^2}{16z_s^2} \\ c^2 + a_2^2 = \dfrac{(a_1^2 - a_2^2 - 4z_s^2)^2}{16z_s^2} = \dfrac{(4z_s^2 - a_1^2 + a_2^2)^2}{16z_s^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{(2z_s - a_1 - a_2)(2z_s + a_1 + a_2)(2z_s - a_1 + a_2)(2z_s + a_1 - a_2)}}{4z_s}$$

$$\Rightarrow Cosh(\eta_1) = \frac{a_1^2 - a_2^2 + 4z_s^2}{4z_s a_1} \quad Cosh(\eta_2) = \frac{4z_s^2 - a_1^2 + a_2^2}{4z_s a_2}$$

$$Sphères \quad \begin{cases} S_1\left(-c\dfrac{Cosh(\eta_1)}{Sinh(\eta_1)}, \dfrac{c}{Sinh(\eta_1)}\right) = S_1\left(-\dfrac{4z_s^2 + a_1^2 - a_2^2}{4z_s}, a_1\right) \\ S_2\left(c\dfrac{Cosh(\eta_2)}{Sinh(\eta_2)}, \dfrac{c}{Sinh(\eta_2)}\right) = S_2\left(\dfrac{4z_s^2 - a_1^2 + a_2^2}{4z_s}, a_2\right) \end{cases}$$

Le problème aux limites correspond à un problème de Dirichlet simple dans l'intervalle η€[-η1,η2], dont la solution est à rechercher sous la forme :

$$T(\eta,\vartheta)=\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{A_n\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta+\eta_1)\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_1+\eta_2)\right)}+B_n\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_2-\eta)\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_1+\eta_2)\right)}\right\}P_n(Cos(\vartheta))$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=-\eta_1}=V_1\Rightarrow\frac{V_1}{\sqrt{2Cosh(\eta_1)-2Cos(\vartheta)}}=\sum_{n=0}^{+\infty}B_nP_n(Cos(\vartheta))$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_2}=V_2\Rightarrow\frac{V_2}{\sqrt{2Cosh(\eta_2)-2Cos(\vartheta)}}=\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(Cos(\vartheta))$$

$$Comme\quad\frac{1}{\sqrt{2Cosh(\eta_1)-2Cos(\vartheta)}}=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_1}P_n(Cos(\vartheta))\quad\frac{1}{\sqrt{2Cosh(\eta_2)-2Cos(\vartheta)}}=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_2}P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow A_n=V_2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_2}\qquad B_n=V_1e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_1}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta)=\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left\{\begin{array}{l}V_2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_2}\dfrac{Sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta+\eta_1)\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_1+\eta_2)\right)}+\\+V_1e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_1}\dfrac{Sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_2-\eta)\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_1+\eta_2)\right)}\end{array}\right\}\times\\\times P_n(Cos(\vartheta))\right]$$

.

En présence d'un champ électrique externe, la solution prend la forme :

$$T(\eta,\vartheta)=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{A_n\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta+\eta_1)\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_1+\eta_2)\right)}+B_n\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_2-\eta)\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_1+\eta_2)\right)}\right\}P_n(Cos(\vartheta))-\\-\frac{E_0cSinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\end{array}\right\}$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=-\eta_1}=V_1\Rightarrow\frac{V_1}{\sqrt{2Cosh(\eta_1)-2Cos(\vartheta)}}+E_0c\frac{Sinh(\eta_1)}{(Cosh(\eta_1)-Cos(\vartheta))^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{+\infty}B_nP_n(Cos(\vartheta))$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_2}=V_2\Rightarrow\frac{V_2}{\sqrt{2Cosh(\eta_2)-2Cos(\vartheta)}}+E_0c\frac{Sinh(\eta_2)}{(Cosh(\eta_2)-Cos(\vartheta))^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(Cos(\vartheta))$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+w^2-2wCos(\vartheta)}}=\frac{1}{\sqrt{w}\sqrt{w+\frac{1}{w}-2Cos(\vartheta)}}=\sum_{n=0}^{+\infty}w^nP_n(Cos(\vartheta))\quad w=e^{-\eta}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta)}}=\sum_{n=0}^{+\infty}w^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}P_n(Cos(\vartheta))=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}P_n(Cos(\vartheta))\Leftrightarrow\int_{-1}^{+1}dz\frac{P_n(z)}{\sqrt{Cosh(\eta)-z}}=\frac{2\sqrt{2}}{2n+1}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}$$

$$Dérivation\ \eta\Rightarrow\frac{Sinh(\eta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}P_n(Cos(\vartheta))\Leftrightarrow\int_{-1}^{+1}dz\frac{P_n(z)}{(Cosh(\eta)-z)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}}{Sinh(\eta)}$$

$$\frac{V_{1,2}}{\sqrt{2Cosh(\eta_{1,2})-2Cos(\vartheta)}}+2E_0c\frac{Sinh(\eta_{1,2})}{(2Cosh(\eta_{1,2})-2Cos(\vartheta))^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(V_{1,2}+E_0c(2n+1))e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_{1,2}}P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow A_n=e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_2}(V_2+E_0c(2n+1))\quad B_n=e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_1}(V_1+E_0c(2n+1))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta)=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta)}\times\\\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_2}(V_2+E_0c(2n+1))\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta+\eta_1)\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_1+\eta_2)\right)}+\\+e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_1}(V_1+E_0c(2n+1))\frac{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_2-\eta)\right)}{Sinh\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\eta_1+\eta_2)\right)}\end{array}\right\}P_n(Cos(\vartheta))-\\-\frac{E_0cSinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\end{array}\right\}$$

.

Les intégrales suivantes sont en relation avec les calculs précédents :

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} dz \dfrac{P_n(z)}{\sqrt{x-z}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2n+1}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \\ \int_{-1}^{+1} dz \dfrac{P_n(z)}{\sqrt{x+z}} = (-1)^n \dfrac{2\sqrt{2}}{2n+1}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \textit{Brychkov vol } 2\ 2.17.1.n°12$$

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} dz \dfrac{P_n(z)}{(x-z)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \\ \int_{-1}^{+1} dz \dfrac{P_n(z)}{(x+z)^{\frac{3}{2}}} = (-1)^n \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \textit{Brychkov vol } 2\ 2.17.1.n°12$$

$$\textit{De plus Brychkov vol } 2\ 2.17.1.n°13 \quad \int_{-1}^{+1} dz \frac{P_n(z)}{y-z} = 2Q_n(y) \Leftrightarrow \frac{1}{y-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{2n+1} Q_n(y) P_n(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{2n+1} Q_n(Cosh(\eta)) P_n(Cos(\vartheta))$$

Le profil sur l'axe z se calcule à partir des coordonnées bi-sphériques, en posant les valeurs suivantes des coordonnées bi-sphériques :

$$c = \frac{\sqrt{(2z_s - a_1 - a_2)(2z_s + a_1 + a_2)(2z_s - a_1 + a_2)(2z_s + a_1 - a_2)}}{4z_s}$$

$$z \in \left[-\frac{4z_s^2 + a_1^2 - a_2^2}{4z_s} + a_1, \frac{4z_s^2 - a_1^2 + a_2^2}{4z_s} - a_2 \right] \Rightarrow \begin{cases} \vartheta = \pi \quad et \quad \eta = 2ArcTanh\left(\dfrac{z}{c}\right) \\ T(z) = T\left(2ArcTanh\left(\dfrac{z}{c}\right), \pi\right) \end{cases}$$

$$z \in \left[-\frac{4z_s^2 + a_1^2 - a_2^2}{4z_s} - a_1, \frac{4z_s^2 + a_1^2 - a_2^2}{4z_s} + a_1 \right] \Rightarrow T(z) = V_1$$

$$z \in \left[\frac{4z_s^2 - a_1^2 + a_2^2}{4z_s} - a_2, \frac{4z_s^2 - a_1^2 + a_2^2}{4z_s} + a_2 \right] \Rightarrow T(z) = V_2$$

$$\left. \begin{array}{l} z > \dfrac{4z_s^2 - a_1^2 + a_2^2}{4z_s} + a_2 \\ z < -\dfrac{4z_s^2 + a_1^2 - a_2^2}{4z_s} - a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta = 0 \quad et \quad \eta = 2ArcCotanh\left(\dfrac{z}{c}\right) \\ T(z) = T\left(2ArcCotanh\left(\dfrac{z}{c}\right), 0\right) \end{cases}$$

Revenons maintenant à la recherche de la solution en coordonnées sphériques :

$$T(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{n+1}} - E_0 z$$

$r_s = |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{s0}| \quad r_i = |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{i0}| \quad \vec{\mathbf{r}}$ *point d'observation*

$\vec{\mathbf{r}}_{s0} \quad \vec{\mathbf{r}}_{i0}$ *centres respectifs des sphère supérieure et inférieure* .

On rappelle que l'on a les relations suivantes pour un système de coordonnées basé sur le plan situé entre les deux sphères:

$$\vec{\mathbf{r}} = (x,y,z) = (x,y,rCos(\vartheta)) \quad \vec{\mathbf{r}}_{i0} = (0,0,-z_1) \quad \vec{\mathbf{r}}_{s0} = (0,0,z_2) \quad z_1 + z_2 = z_s$$

$$r_i = |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{i0}| = \sqrt{r^2 + z_1^{\ 2} - 2\vec{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{r}}_{i0}} = \sqrt{r^2 + z_1^{\ 2} + 2z_1 z} = \sqrt{r^2 + z_1^{\ 2} + 2z_1 rCos(\vartheta)}$$

$$r_s = |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{s0}| = \sqrt{r^2 + z_2^{\ 2} - 2\vec{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{r}}_{s0}} = \sqrt{r^2 + z_2^{\ 2} - 2z_2 z} = \sqrt{r^2 + z_2^{\ 2} - 2z_2 rCos(\vartheta)}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n P_n(Cos(\vartheta_s))}{r_s^{\ n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n P_n(Cos(\vartheta_i))}{r_i^{\ n+1}} - E_0 rCos(\vartheta)$$

Les deux conditions aux limites sont :

$$T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_s} = V_2 \quad T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_i} = V_1$$

$\vec{\mathbf{r}}_s$ $\vec{\mathbf{r}}_i$ *deux points respectifs des sphères supérieure et inférieure* .

La condition aux limites supérieure donne l'expression suivante :

$$T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_s} = V_2 + E_0 z_2 + E_0 a_2 Cos(\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_s)) \left\{ \frac{A_n}{a_2^{\ n+1}} + \sum_{l=0}^{+\infty} B_l (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a_2^{\ n}}{(2z_s)^{l+n+1}} \right\} .$$

La condition aux limites inférieure donne l'expression suivante :

$$T(r,\vartheta)\big|_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_i} = V_1 - E_0 z_1 + E_0 a_1 Cos(\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_i)) \left\{ \sum_{l=0}^{+\infty} A_l (-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{a_1^{\ n}}{(2z_s)^{l+n+1}} + B_n \frac{1}{a_1^{\ n+1}} \right\} .$$

Posons les valeurs suivantes :

$$\lambda = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{2z_s} \qquad U_n = \frac{A_n}{(a_1 a_2)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad W_n = \frac{B_n}{(a_1 a_2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$V_2 + E_0 z_2 + E_0 a_2 Cos(\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_s)) \left\{ U_n \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{n+1}{2}} + \lambda \sum_{l=0}^{+\infty} W_l (-1)^n \lambda^{n+l} \frac{(l+n)!}{l!n!} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{n}{2}} \right\}$$

$$V_1 - E_0 z_1 + E_0 a_1 Cos(\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta_i)) \left\{ \lambda \sum_{l=0}^{+\infty} U_l (-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!} \lambda^{n+l} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{n}{2}} + W_n \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{n+1}{2}} \right\} .$$

Ce qui conduit au système d'équations linéaires :

$$\left.\begin{array}{l}
U_0 + \lambda \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \sum_{l=0}^{+\infty} W_l \lambda^l = (V_2 + E_0 z_2) \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \\
U_1 + \lambda \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} W_l (-1) \lambda^{1+l} \frac{(l+1)!}{l!} = E_0 \frac{a_2^{\ 2}}{a_1} \\
\cdots \\
U_n + \lambda \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} W_l (-1)^n \lambda^{n+l} \frac{(l+n)!}{l!n!} = 0
\end{array}\right\}
\left\{\begin{array}{l}
\lambda \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \sum_{l=0}^{+\infty} U_l \lambda^l + W_0 = (V_1 - E_0 z_1) \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \\
\lambda \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} U_l (-1) \lambda^{1+l} \frac{(l+1)!}{l!} + W_1 = E_0 \frac{a_1^{\ 2}}{a_2} \\
\cdots \\
\lambda \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} U_l (-1)^n \lambda^{n+l} \frac{(l+n)!}{l!n!} + W_n = 0
\end{array}\right. .$$

Retranscrit à l'aide d'une notation matricielle :

$$\textit{Posons} \quad \mathbf{U} = [U_n]^T \quad \mathbf{W} = [W_n]^T$$

$$\mathbf{G}^S = \left[G_{nl}^S\right] \quad G_{nl}^S = (-1)^n \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \lambda^{l+n} \frac{(l+n)!}{l!n!}$$

$$\mathbf{G}^I = \left[G_{nl}^I\right] \quad G_{nl}^I = (-1)^l \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \lambda^{l+n} \frac{(l+n)!}{l!n!}$$

$$\mathbf{1} = [\delta_{nl}] \quad \mathbf{V}^S = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}[V_2, 0, \cdots, 0]^T \quad \mathbf{V}^I = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}[V_1, 0, \cdots, 0]^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\mathbf{1} + \lambda \mathbf{G}^S\right) \mathbf{U} = \mathbf{V}^S \\ \left(\mathbf{1} + \lambda \mathbf{G}^I\right) \mathbf{W} = \mathbf{V}^I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{U} = \left(\mathbf{1} - \lambda^2 \mathbf{G}^S . \mathbf{G}^I\right)^{-1} . \left(\mathbf{V}^S - \lambda \mathbf{G}^S . \mathbf{V}^I\right) \\ \mathbf{W} = \left(\mathbf{1} - \lambda^2 \mathbf{G}^I . \mathbf{G}^S\right)^{-1} . \left(\mathbf{V}^I - \lambda \mathbf{G}^I . \mathbf{V}^S\right) \end{cases}.$$

Une fois ce système linéaire inversée, la solution s'écrit avec les développements respectifs des contributions des sphères supérieures et inférieures dont la forme dépend du l'emplacement du plan entre les sphères, déterminé par les positions -z1, et z2 qui sont à priori quelconque :

$$T(r,\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A_nP_n\left(Cos(\vartheta_s)\right)}{r_s^{\,n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_nP_n\left(Cos(\vartheta_i)\right)}{r_i^{\,n+1}}-E_0rCos(\vartheta)$$

$\vec{\mathbf{r}}_{s0}$ $\vec{\mathbf{r}}_{i0}$ *centres respectifs des sphères supérieure et inférieure*

Contrainte $z_1+z_2=2z_s$

$$\begin{cases}r_i=\left|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_{i0}\right|=\sqrt{r^2+z_1^{\,2}+2z_1rCos(\vartheta)}\\ z_1+rCos(\vartheta)=r_iCos(\vartheta_i)\end{cases}\qquad\begin{cases}r_s=\left|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_{s0}\right|=\sqrt{r^2+z_2^{\,2}-2z_2rCos(\vartheta)}=\sqrt{r^2+z_2^{\,2}+2z_2rCos(\pi-\vartheta)}\\ z_2-rCos(\vartheta)=-r_sCos(\vartheta_s)\Leftrightarrow z_2+rCos(\pi-\vartheta)=r_sCos(\pi-\vartheta_s)\end{cases}$$

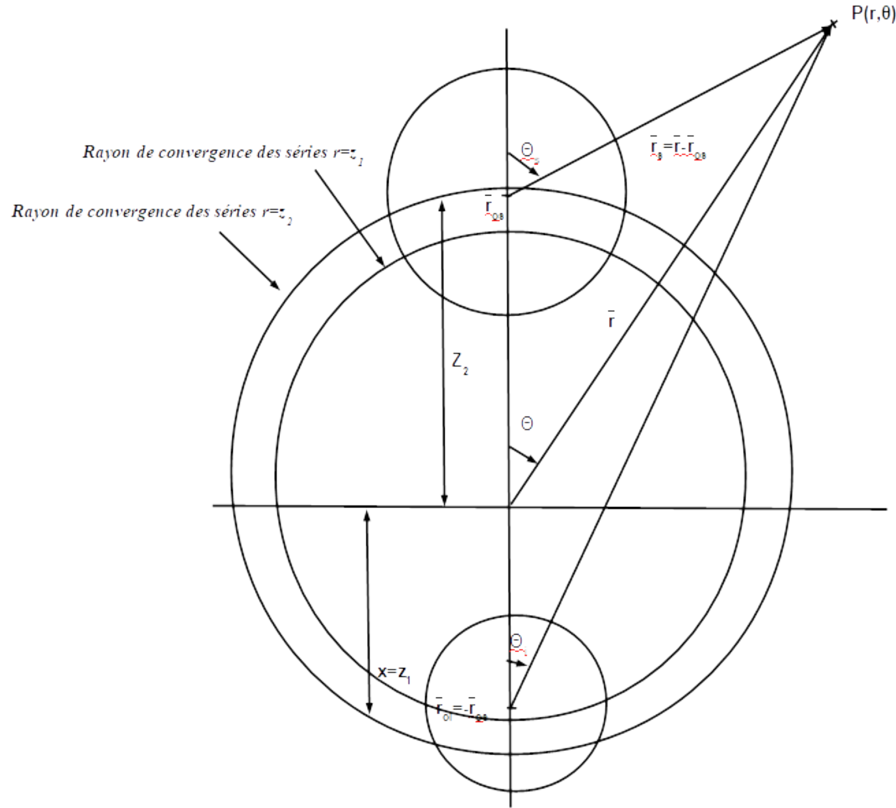
$$\begin{cases}\dfrac{P_n\left(Cos(\vartheta_s)\right)}{r_s^{\,n+1}}=\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{z_2^{\,l+n+1}}P_l\left(Cos(\vartheta)\right) & r<z_2\\ \dfrac{P_n\left(Cos(\vartheta_s)\right)}{r_s^{\,n+1}}=\displaystyle\sum_{l=n}^{+\infty}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{z_2^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l\left(Cos(\vartheta)\right) & r>z_2\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{P_n\left(Cos(\vartheta_i)\right)}{r_i^{\,n+1}}=\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{z_1^{\,l+n+1}}P_l\left(Cos(\vartheta)\right) & r<z_1\\ \dfrac{P_n\left(Cos(\vartheta_i)\right)}{r_i^{\,n+1}}=\displaystyle\sum_{l=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{l+n}l!}{n!(l-n)!}\frac{z_1^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l\left(Cos(\vartheta)\right) & r>z_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta)=\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{z_2^{\,l+n+1}}P_l\left(Cos(\vartheta)\right) & r<z_2\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sum_{l=n}^{+\infty}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{z_2^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l\left(Cos(\vartheta)\right) & r>z_2\end{array}\right\}+\\ +\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^l}{z_1^{\,l+n+1}}P_l\left(Cos(\vartheta)\right) & r<z_1\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\sum_{l=n}^{+\infty}(-1)^{l+n}\frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{z_1^{\,l-n}}{r^{l+1}}P_l\left(Cos(\vartheta)\right) & r>z_1\end{array}\right\}\end{array}\right]-E_0rCos(\vartheta)$$

En inversant l'ordre de sommation puis $l\leftrightarrow n$

$$T(r,\vartheta)=\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n\left(Cos(\vartheta)\right)\sum_{l=0}^{+\infty}A_l(-1)^l\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^n}{z_2^{\,l+n+1}} & r<z_2\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n\left(Cos(\vartheta)\right)\sum_{l=0}^{l=n}A_l\frac{n!}{l!(n-l)!}\frac{z_2^{\,n-l}}{r^{n+1}} & r>z_2\end{array}\right\}+\\ +\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n\left(Cos(\vartheta)\right)\sum_{l=0}^{+\infty}B_l(-1)^n\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{r^n}{z_1^{\,l+n+1}} & r<z_1\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n\left(Cos(\vartheta)\right)\sum_{l=0}^{l=n}B_l(-1)^{n+l}\frac{n!}{l!(n-l)!}\frac{z_1^{\,n-l}}{r^{n+1}} & r>z_1\end{array}\right\}\end{array}\right]-E_0rCos(\vartheta)$$

Illustration du plan médian coïncidant avec l'origine des coordonnées bi-sphériques



$$\begin{cases} r_i = \left|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{i0}\right| = \sqrt{r^2 + z_1^{\,2} + 2z_1 r Cos(\vartheta)} \\ z_1 + rCos(\vartheta) = r_i Cos(\vartheta_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_s = \left|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{s0}\right| = \sqrt{r^2 + z_2^{\,2} - 2z_2 r Cos(\vartheta)} = \sqrt{r^2 + z_2^{\,2} + 2z_2 r Cos(\pi - \vartheta)} \\ z_2 - rCos(\vartheta) = -r_s Cos(\vartheta_s) \Leftrightarrow z_2 + rCos(\pi - \vartheta) = r_s Cos(\pi - \vartheta_s) \end{cases}$$

Le choix des positions -z1, et z2 est libre, toutefois pour comparer la solution sphérique avec la solution bi-sphérique, notamment sur l'axe z, un choix s'impose :

$$z_1 = \zeta_1 = \frac{4z_s^{\,2} + a_1^{\,2} - a_2^{\,2}}{4z_s} \quad z_2 = \zeta_2 = \frac{4z_s^{\,2} + a_2^{\,2} - a_1^{\,2}}{4z_s}.$$

Il peut alors survenir des problèmes de convergence des séries précédentes. Dans ce cas on doit alors jongler entre les différentes solutions pour un choix judicieux du développement en série, selon les positions dans l'espace. Par exemple si le plan est choisit exactement médian, alors les rayons de convergences des séries coïncident pour la valeur r=zs, et l'on a la solution :

$$z_1 = z_2 = z_s \Rightarrow$$

$$T(r,\vartheta) = \begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta)) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{r^n}{z_s^{\,l+n+1}} \left[A_l(-1)^l + B_l(-1)^n\right] & r < z_s \\ \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta)) \sum_{l=0}^{l=n} \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{z_s^{\,n-l}}{r^{n+1}} \left[A_l + B_l(-1)^{n+l}\right] & r > z_s \end{Bmatrix}.$$

Si le plan passe exactement au centre de la sphère inférieure, alors :

$$z_1 = 0 \quad z_2 = 2z_s \Rightarrow \begin{cases} r_i = r \\ \vartheta = \vartheta_i \end{cases} \quad \begin{cases} r_s = \sqrt{r^2 + 4z_s^{\ 2} + 4z_s rCos(\pi - \vartheta)} \\ 2z_s - rCos(\vartheta) = -r_s Cos(\vartheta_s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta) = \begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta)) \sum_{l=0}^{+\infty} A_l (-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{r^n}{(2z_s)^{l+n+1}} & r < 2z_s \\ \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta)) \sum_{l=0}^{l=n} A_l \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{(2z_s)^{n-l}}{r^{n+1}} & r > 2z_s \end{Bmatrix} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n P_n(Cos(\vartheta))}{r^{n+1}} - E_0 rCos(\vartheta)$$

Si le plan passe exactement au centre de la sphère supérieure, alors :

$$z_1 = 2z_s \quad z_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_i = \sqrt{r^2 + 4z_s^{\ 2} + 4z_s rCos(\vartheta)} \\ 2z_s + rCos(\vartheta) = r_i Cos(\vartheta_i) \end{cases} \quad \begin{cases} r_s = r \\ \vartheta = \vartheta_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n P_n(Cos(\vartheta))}{r^{n+1}} + \begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta)) \sum_{l=0}^{+\infty} B_l (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{r^n}{(2z_s)^{l+n+1}} & r < 2z_s \\ \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cos(\vartheta)) \sum_{l=0}^{l=n} B_l (-1)^{n+l} \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{(2z_s)^{n-l}}{r^{n+1}} & r > 2z_s \end{Bmatrix} - E_0 rCos(\vartheta)$$

Si le plan est identique au plan bi-sphérique, soit les positions des centres des sphères est respectivement -z1,z2 : $z_1 = \zeta_1 = \frac{4z_s^{\ 2} + a_1^{\ 2} - a_2^{\ 2}}{4z_s}$ $\quad z_2 = \zeta_2 = \frac{4z_s^{\ 2} + a_2^{\ 2} - a_1^{\ 2}}{4z_s}$ *alors il 'n'y a aucune translation de variable à réaliser.*

Le profil sur l'axe z, avec des positions quelconque z1 et z2 se calcule comme suit :

$$z \in [-z_1 + a_1, z_2 - a_2] \Rightarrow \begin{cases} \vartheta = 0 \ si \ z > 0 \\ \vartheta = \pi \ si \ z < 0 \end{cases} \quad T(z) = T(|z|, \vartheta)$$

$$z \in [-z_1 - a_1, -z_1 + a_1] \Rightarrow T(z) = V_1$$

$$z \in [z_2 - a_2, z_2 + a_2] \Rightarrow T(z) = V_2$$

$$z > z_2 + a_2 \Rightarrow \vartheta = 0$$

$$\Rightarrow T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{l=n} A_l \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{z_2^{\ n-l}}{r^{n+1}} + \begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} B_l (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{z^n}{z_1^{\ l+n+1}} & z < z_1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{l=n} B_l (-1)^{n+l} \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{z_1^{\ n-l}}{z^{n+1}} & z > z_1 \end{Bmatrix} - E_0 rCos(\vartheta)$$

$$z < -z_1 - a_1 \Rightarrow \vartheta = \pi$$

$$\Rightarrow T(z) = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sum_{l=0}^{l=n} B_l (-1)^{n+l} \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{z_1^{\ n-l}}{|z|^{n+1}} + \begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sum_{l=0}^{+\infty} A_l (-1)^l \frac{(l+n)!}{l!n!} \frac{|z|^n}{z_2^{\ l+n+1}} & |z| < z_2 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sum_{l=0}^{l=n} A_l \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{z_2^{\ n-l}}{|z|^{n+1}} & |z| > z_2 \end{Bmatrix} \right] - E_0 rCos(\vartheta)$$

Et si l'on doit comparer les deux profils en coordonnées sphériques et bi-Sphériques, alors il faut procéder à une translation de variable sur l'axe z, comme suit :

$$\zeta_1 = \frac{4z_s^{\ 2} + a_1^{\ 2} - a_2^{\ 2}}{4z_s} \quad \zeta_2 = \frac{4z_s^{\ 2} + a_2^{\ 2} - a_1^{\ 2}}{4z_s}$$

$$\zeta_1 - z_1 = z_2 - \zeta_2 \Leftrightarrow \zeta_1 + \zeta_2 = z_1 + z_2 = 2z_s$$

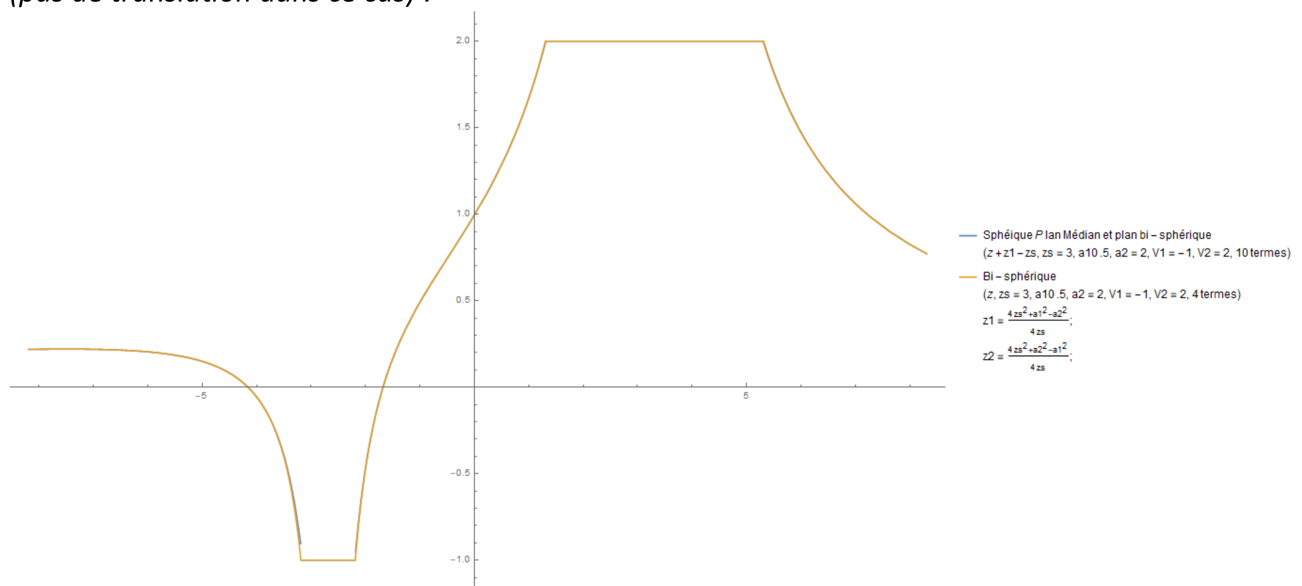
$$T_{sphérique}(z + \zeta_1 - z_1) = T_{Bi-sphérique}(z) \Leftrightarrow T_{sphérique}(z + z_2 - \zeta_2) = T_{Bi-sphérique}(z)$$

A titre d'illustration voici le profil sur l'axe z d'un problème aux limites à deux sphères, hors de la présence d'un champ électrique, calculé soit en coordonnées sphériques soit en coordonnées bi-sphériques, pour des paramètres suivants :

- *a1=0.5*
- *a2=2*
- *V1=-1*
- *V2=2*
- *zs=3*
- *E0=0*

La convergence en coordonnées est obtenu après seulement 4 termes du développement, tandis qu'il faut plus de 10 termes en coordonnées sphériques. On a utilisé le plan médian pour les positions z positive et au delà du rayon de la sphère supérieure. Pour les positions en dessous du rayon de la sphère inférieure également (translation de la forme $\zeta_1 = \dfrac{4z_s^{\,2} + a_1^{\,2} - a_2^{\,2}}{4z_s}$ $\quad \zeta_2 = \dfrac{4z_s^{\,2} + a_2^{\,2} - a_1^{\,2}}{4z_s}$ $\quad T_{sphérique}(z + \zeta_1 - z_s) = T_{sphérique}(z + z_s - \zeta_2) = T_{Bi-sphérique}(z)$ *).*

Entre la sphère inférieure et le plan médian, on a utilisé le développement sur le plan bi-sphérique (pas de translation dans ce cas) :



.

Problèmes aux limites de Laplace homogène en dimension radiale sur des sections coniques pleines et creuses

Dans tous les problèmes coniques-sphériques envisagés jusqu'à présent, seuls les problèmes homogènes en dimension angulaire ont été résolus. Il s'agissait de problème du type :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\, et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\, et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=f_{1\theta}(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_{2\theta}(Cos(\theta))$$

$$T_z^{'}(r,z) \quad ou \quad T_z^{'}(r,z)\big|_{z=\mu_1}=0$$

$$T_z^{'}(r,z) \quad ou \quad T_z^{'}(r,z)\big|_{z=\mu_2}=0$$

On a même exhibé quelques propriétés intéressantes des fonctions propres angulaires, des fonctions de Legendre de degré non entier. Ce faisant on a utilisé dans la séparation des variables (prenons pour simplifier l'équation sphérique en r,ϑ) les équations séparées suivantes :

$$T(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$

$$\left|\begin{array}{l} R''(r)+\dfrac{2}{r}R'(r)-\dfrac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}R(r)=0 \Rightarrow R(r)=A\,r^{\lambda}+B\,r^{-(\lambda+1)} \\ \Theta''(\theta)+\dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+[\lambda(\lambda+1)]\Theta(\theta)=0 \Rightarrow \Theta(\theta)=A\,P_\lambda(Cos(\theta))+B\,Q_\lambda(Cos(\theta)) \end{array}\right.$$

$P_\lambda(z)$ *Fonction de Legendre de degré* λ $\quad Q_\lambda(z)$ *Fonction de Legendre de deuxième espèce de degré* λ

$$valeur\ propre\ nulle \rightarrow si\ \lambda=0 \Rightarrow R(r)=A+B/r\ ;\ \Theta(\theta)=C+D\ Log[\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}]$$

Seulement les valeurs λ entières (sphère complète) ou non entière (cône) positives ont été envisagées.

Envisageons un autre type de problèmes homogènes dans la dimension radiale, à savoir :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\, et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\, et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$

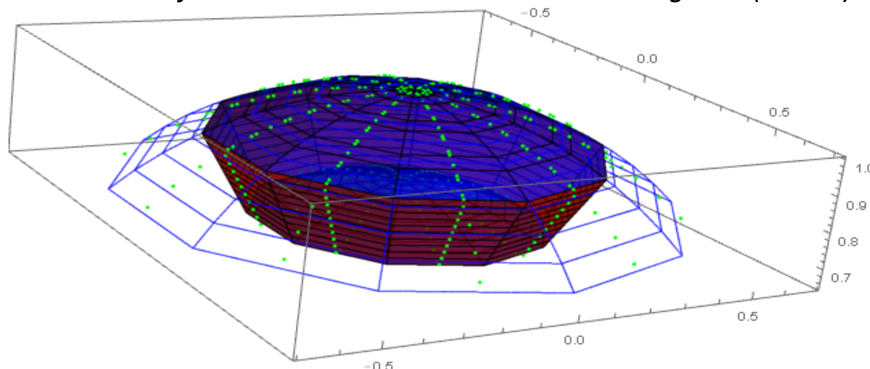
$$\alpha_1 T_r^{'}(r,\theta)-\beta_1 T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad conditions\ mixtes\ licites\ avec\ coefficients\ constants$$

$$\alpha_2 T_r^{'}(r,\theta)+\beta_2 T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=0$$

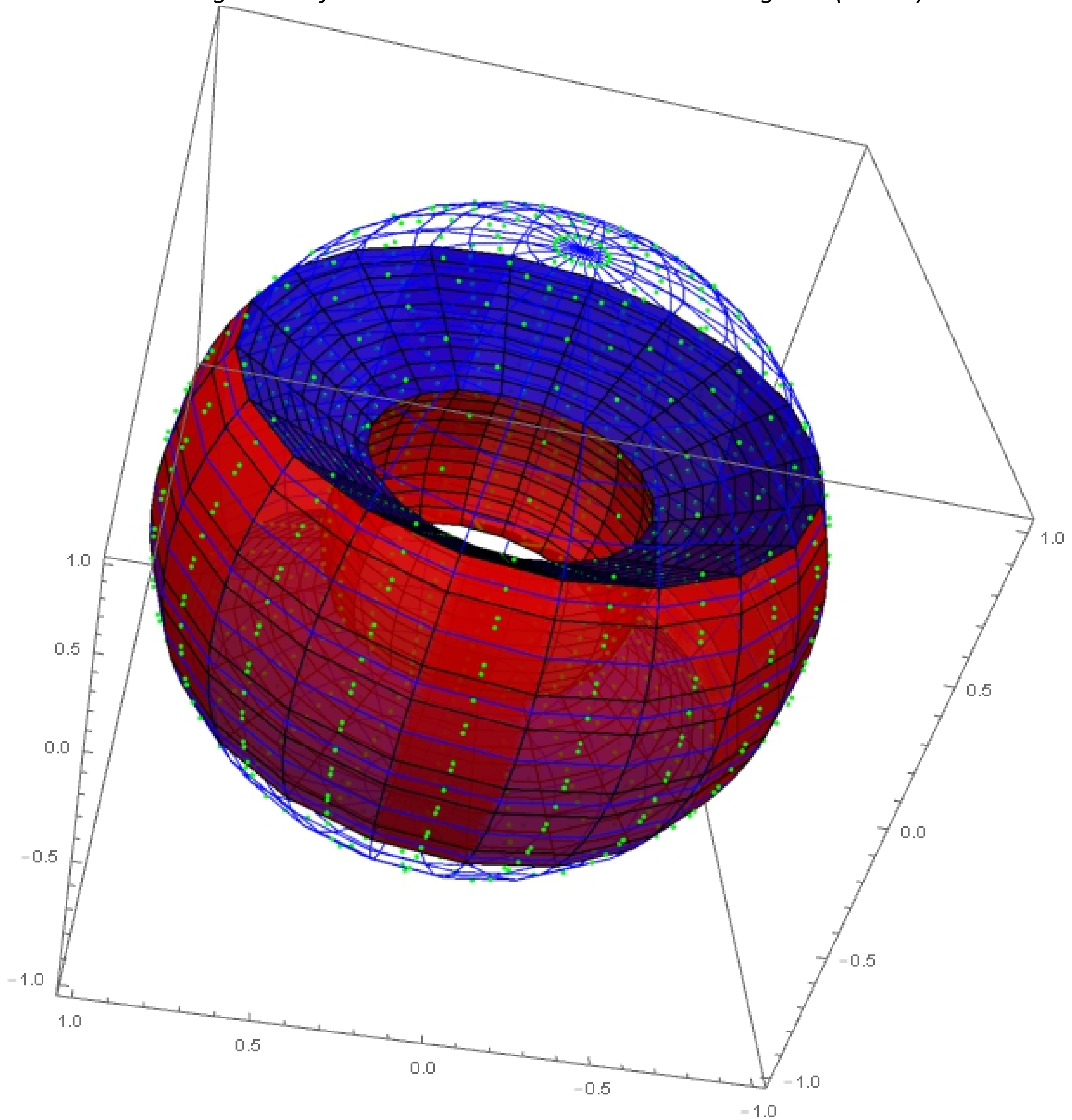
$$T_z^{'}(r,z) \quad ou \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_1}=f_{1r}(r)$$

$$T_z^{'}(r,z) \quad ou \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_2}=f_{2r}(r)$$

Ci dessous une cône creux en rouge la surface aux conditions aux limites inhomogènes et en bleu les deux surfaces aux conditions aux limites homogènes (r=Cste)



Ci dessous une section conique creuse en bleu la surface aux conditions aux limites inhomogènes et en rouge les surfaces aux conditions aux limites homogènes (r=Cste)



Dans ce cas il convient de trouver un système de fonctions propres dans la dimension radiale permettant un développement en série. Ce n'est pas le cas avec les fonctions $R(r) = A\,r^{\lambda} + B\,r^{-(\lambda+1)}$ *pour le premier choix de valeur de* λ*.*

Mais revenons à l'équation aux dérivées secondes, et transformons là par un changement de variable :

$$R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}R(r)=0 \leftarrow r=e^t$$

$$\Rightarrow dr=rdt \rightarrow R'(r)=\frac{1}{r}R'(t) \qquad R''(r)=-\frac{1}{r^2}R'(t)+\frac{1}{r^2}R''(t)$$

$$R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}R(r)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{r^2}R'(t)+\frac{1}{r^2}R''(t)+\frac{2}{r^2}R'(t)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}R(t)=0$$

$$\Rightarrow R''(t)+R'(t)-\lambda(\lambda+1)R(t)=0$$

$$Equation\,caractéristique \rightarrow x^2+x-\lambda(\lambda+1)x=0 \rightarrow Discriminant\ \Delta=1+4\lambda(\lambda+1)=(2\lambda+1)^2$$

$$Sous\,la\ forme\ R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)+\frac{\mu}{r^2}R(r) \Rightarrow R''(t)+R'(t)+\mu R(t)=0 \rightarrow Discriminant\ \Delta=1-4\mu$$

Le discriminant s'annule pour la valeur λ=-1/2 ou μ=1/4, donnant la solution suivante, sans que cette solution ne corresponde pour autant à ***<u>la solution de valeur propre nulle qui elle demeure R(r)=A+B/r</u>*** *:*

$$R''(t)+R'(t)+\frac{R(t)}{4}=0 \quad t=Log(r)$$

$$R(t)=\left(Ae^{-\frac{t}{2}}+Be^{\frac{t}{2}}\right)=e^{\frac{t}{2}}\left(Ae^{-t}+B\right)=e^{\frac{Log(r)}{2}}\left(\frac{A}{r}+B\right)=\sqrt{r}\left(\frac{A}{r}+B\right) \quad ou \quad \frac{1}{\sqrt{r}}\left(B\,r+A\right)$$

.

Pour les valeurs tel que μ>1/4, alors la valeur λ(λ+1)<1 et les solutions radiales sont en puissance de r, non oscillante. Les solutions radiales générales s'expriment sous la forme :

$$R''(t)+R'(t)+\mu\,R(t)=0 \quad t=Log(r)$$

$$\lambda^2+\lambda+\mu=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1)=-\mu$$

$$Si\ 1-4\mu>0$$

$$\rightarrow \lambda=\frac{-1+\sqrt{1-4\mu}}{2} \quad \lambda+1=\frac{1+\sqrt{1-4\mu}}{2} \Rightarrow R(t)=\left(Ae^{\frac{t}{2}\left(-1-\sqrt{1-4\mu}\right)}+Be^{\frac{t}{2}\left(-1+\sqrt{1-4\mu}\right)}\right)=R(t)=\left(Ae^{-t(\lambda+1)}+Be^{t\lambda}\right)$$

$$\rightarrow \lambda=\frac{-1-\sqrt{1-4\mu}}{2} \quad \lambda+1=\frac{1-\sqrt{1-4\mu}}{2} \Rightarrow R(t)=\left(Ae^{t\lambda}+Be^{-t(\lambda+1)}\right)=R(t)=\left(Ae^{-t(\lambda+1)}+Be^{t\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow R(r)=\left(Ar^{-(\lambda+1)}+Br^{\lambda}\right)$$

$$Si\ 1-4\mu<0$$

$$\rightarrow \lambda=\frac{-1\pm i\sqrt{4\mu-1}}{2}$$

$$R(t)=\left(Ae^{\frac{t}{2}\left(-1-i\sqrt{4\mu-1}\right)}+Be^{\frac{t}{2}\left(-1+i\sqrt{4\mu-1}\right)}\right)=e^{-\frac{t}{2}}\left(Ae^{-i\frac{t}{2}\sqrt{4\mu-1}}+Be^{i\frac{t}{2}\sqrt{4\mu-1}}\right)$$

$$R(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(A\,Cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-1}}{2}Log(r)\right)+B\,Sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-1}}{2}Log(r)\right)\right)$$

.

Nous avons ainsi trouvé des fonctions oscillantes pour le cas μ<1/4, il suffit alors de contraindre ces fonctions à respecter les conditions aux limites radiales :

Soit pour une fonction sinusoïdales s'annulant en lr1 et lr2, on trouve immédiatement :

$$Posons\,\nu=\frac{\sqrt{4\mu-1}}{2}\quad et\quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$Conditions\ R(l_{r1})=R(l_{r2})=0\Rightarrow \nu\ Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)=n\,\pi\Leftrightarrow \nu\,\alpha=n\,\pi$$

$$R_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}Sin\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)\quad ou\,bien\quad R_n(r)=\sqrt{\frac{l_{r1}}{r}}\,Sin\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)$$

Pour une condition de Neumann de part et d'autre :

$$Conditions\ \frac{dR(l_{r1})}{dr}=0\quad et\quad \frac{dR(l_{r2})}{dr}=0\quad Posons\quad t=Log(r)\quad t_1=Log(l_{r1})\quad t_2=Log(l_{r2})\rightarrow\tau=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$$

$$\alpha=t_2-t_1=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)\rightarrow\tau=\frac{(t-t_1)}{\alpha}\rightarrow t=t_1+\alpha\,\tau\Leftrightarrow\alpha\,\tau=Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\quad \nu=\frac{\sqrt{4\mu-1}}{2}$$

$$Conditions\ \frac{dR(l_{r1})}{dr}=\frac{dR(l_{r2})}{dr}=0\Leftrightarrow\frac{dR(0)}{d\tau}=\frac{dR(1)}{d\tau}=0$$

$$R(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left(C\,Cos(\nu\,t)+D\,Sin(\nu\,t)\right)\Rightarrow R(\tau)=\frac{1}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}\left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)+B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)\quad R_r^{'}(r)=\frac{R'(t)}{r}=\frac{R'(\tau)}{\alpha\,r}$$

$$\Rightarrow Conditions\ R'(\tau)=0\quad R_\tau^{'}(\tau)=\frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}\left(\nu\left(-A Sin(\nu\,\alpha\,\tau)+B Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\right)-\frac{1}{2}\left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)+B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)\right)$$

$$R_\tau^{'}(\tau)=\frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}\left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(B\nu-\frac{A}{2}\right)-Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\left(A\nu+\frac{B}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow Conditions\ R_\tau^{'}(0)=R_\tau^{'}(1)\Rightarrow A=B=0\quad sauf\ si\ Sin(\nu\,\alpha)=0\Rightarrow\nu\,\alpha=n\,\pi$$

$$Dans\,ce\,cas\ R_\tau^{'}(0)=0\Rightarrow B\nu-\frac{A}{2}=0\Rightarrow A=2B\nu$$

$$R(\tau)=\frac{1}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}\left(2\nu\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)+Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)\Rightarrow\nu=\frac{n\,\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}$$

$$R_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(2\frac{n\,\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}Cos\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)+Sin\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)\right)$$

$$ou\,bien\quad R_n(r)=\sqrt{\frac{l_{r1}}{r}}\left(2\frac{n\,\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}Cos\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)+Sin\left(\frac{n\,\pi\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)\right)$$

Pour des conditions de Dirichlet en bas et de Neumann en haut :

$$Conditions\ R(l_{r1}) = 0 \quad et \quad \frac{dR(l_{r2})}{dr} = 0$$

$$\Leftrightarrow R(0) = 0 \quad \Rightarrow A = 0 \Rightarrow R(\tau) = \frac{1}{\sqrt{l_{r1}}} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}} Sin(\nu\,\alpha\,\tau) \quad et \quad R'(\tau) = \frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}} \left(\nu\, Cos(\nu\,\alpha\,\tau) - \frac{Sin(\nu\,\alpha\,\tau)}{2} \right)$$

$$\Rightarrow Conditions\ R'(1) = 0 \Rightarrow \nu \quad tq \quad Sin(\nu\,\alpha) = 2\nu\, Cos(\nu\,\alpha)$$

$$\nu \to \nu_n \Rightarrow R(\tau) = \frac{1}{\sqrt{l_{r1}}} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}} Sin(\nu_n\,\alpha\,\tau) \quad \Leftrightarrow \alpha\,\tau = Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)$$

Il vient

$$\alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$\nu_n \quad tq \quad Sin(\nu_n\,\alpha) = 2\nu_n\, Cos(\nu_n\,\alpha)$$

$$R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \quad ou\,bien \quad R_n(r) = \sqrt{\frac{l_{r1}}{r}}\, Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)$$

Et enfin pour des conditions de Dirichlet en haut et de Neumann en bas :

$$Conditions\ \frac{dR(l_{r1})}{dr} = 0 \quad et \quad R(l_{r2}) = 0$$

$$Posons \quad t = Log(r) \quad t_1 = Log(l_{r1}) \quad t_2 = Log(l_{r2}) \to \tau = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \quad \nu = \frac{\sqrt{4\mu - 1}}{2}$$

$$\alpha = t_2 - t_1 = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \to \tau = \frac{t_2 - t}{\alpha} \to t = t_2 - \alpha\,\tau \Leftrightarrow \alpha\,\tau = Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)$$

$$Conditions\ \frac{dR(l_{r1})}{dr} = 0 \quad et \quad R(l_{r2}) = 0 \Leftrightarrow R(0) = 0 \quad et \quad \frac{dR(1)}{d\tau} = 0$$

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(C\, Cos(\nu\, Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)) + D\, Sin(\nu\, Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right))\right) \Leftrightarrow R(\tau) = \frac{1}{\sqrt{l_{r2}}} e^{\frac{\alpha\tau}{2}} \left(A\, Cos(\nu\,\alpha\,\tau) + B\, Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$R'(r) = -\frac{R'(\tau)}{\alpha\, r} \Rightarrow Conditions\ R'(\tau) = 0$$

$$R'(\tau) = \frac{\alpha}{\sqrt{l_{r2}}} e^{\frac{\alpha\tau}{2}} \left(\nu\left(-A Sin(\nu\,\alpha\,\tau) + B Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\right) + \frac{1}{2}\left(A\, Cos(\nu\,\alpha\,\tau) + B\, Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)\right)$$

$$R'(\tau) = \frac{\alpha}{\sqrt{l_{r2}}} e^{\frac{\alpha\tau}{2}} \left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(B\nu + \frac{A}{2}\right) + Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\left(\frac{B}{2} - A\,\nu\right)\right)$$

$$R(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow R'(\tau) = \frac{\alpha}{\sqrt{l_{r2}}} e^{\frac{\alpha\tau}{2}} B\left(\nu\, Cos(\nu\,\alpha\,\tau) + \frac{Sin(\nu\,\alpha\,\tau)}{2}\right)$$

$$\frac{dR(1)}{d\tau} = 0 \Rightarrow Sin(\nu\,\alpha) = -2\nu\, Cos(\nu\,\alpha)$$

$$R(\tau) = e^{\frac{\alpha\tau}{2}} Sin(\nu\,\alpha\,\tau) \Rightarrow Il\, vient \quad \nu_n \quad tq \quad Sin(\nu_n\,\alpha) = -2\nu_n\, Cos(\nu_n\,\alpha) \quad \alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right) \quad ou\,bien \quad R_n(r) = \sqrt{\frac{l_{r2}}{r}}\, Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right)$$

.

Orthogonalité et normalisation des fonctions propres radiales construites

On peut se convaincre facilement de l'orthogonalité en appliquant directement les résultats d'un système de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\ \frac{d}{dr}R(r)\right)+\mu R(r)=0$$

$$\Rightarrow Système\,de\,Sturm-Liouville\ w(r)=1\quad p(r)=r^2\quad s(r)=0$$

Il vient alors la propriété :

$$R_n(r)\to\Phi_n^r(r)$$

$$\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\,\Phi_n^r(r)\Phi_m^r(r)=\left\|\Phi_n^r(r)\right\|^2\delta_{n,m}$$

$$\left\|\Phi_n^r(r)\right\|^2=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\left(\Phi_n^r(r)\right)^2$$

.

On va calculer les normes des fonctions propres directement par leur intégrale, mais avant exprimons des intégrales avec les fonctions propres radiales et une fonction quelconque sous la forme normalisée suivante :

$$\left.\begin{matrix}R_n(r)=\dfrac{1}{\sqrt{r}}\Psi_n(r)\\ f(r)\propto\dfrac{g(r)}{\sqrt{r}}\end{matrix}\right\}\quad I=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\,f(r)R_n(r)\quad \Psi_n(r)\propto A_nCos\left(\nu_nLog\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)+B_nSin\left(\nu_nLog\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)$$

$$\Psi_n(\tau)=A_nCos(\nu_n\alpha\,\tau)+B_nSin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

$$r'=\frac{r}{l_{r1}}\to e^t=r'\to\tau=\frac{t}{Log\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\qquad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)\Leftrightarrow t=\alpha\,\tau$$

$$I=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\,f(r)R_n(r)=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\frac{g(r)}{r}\Psi_n(r)=\int_{1}^{l_{r2}/l_{r1}}dr'\frac{g(r')}{r'}\Psi_n(r')=\int_{0}^{Log(l_{r2}/l_{r1})}dt\,g(t)\Psi_n(t)=\alpha\int_0^1 d\tau\,g(\tau)\Psi_n(\tau)$$

Cette intégrale est valable quelque soit les valeurs propres et fonctions propres associées de nos différents problèmes sur le cône. Appliquons cette série de transformation à la fonction propre elle-même :

$$\nu_n=\frac{n\,\pi}{Log\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}$$

$$\left.\begin{matrix}R_n(r)=\dfrac{1}{\sqrt{r}}Sin\left(\nu_n\,Log\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)\right)\\ f(r)=\dfrac{1}{\sqrt{r}}Sin\left(\nu_n\,Log\left(\dfrac{r}{l_{r1}}\right)\right)\end{matrix}\right\}\quad I=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\,R_n(r)^2=\alpha\int_0^1 d\tau\left(\Psi_n(\tau)\right)^2\quad avec\quad \Psi_n(\tau)=Sin(n\,\pi\,\tau)$$

$$Il\ vient\quad I=\alpha\int_0^1 d\tau\left(Sin(n\,\pi\,\tau)\right)^2=\frac{\alpha}{2}=\frac{Log\left(\dfrac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2}$$

.

En l'appliquant à la forme Cosinus :

$$\nu_n = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} Sin\left(\nu_n \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \\ f(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} Cos\left(\nu_n \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \end{array}\right\} \quad I = \alpha \int_0^1 d\tau \, Cos(n\pi\tau) Sin(n\pi\tau) = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 d\tau \, Sin(2n\pi\tau) = 0$$

Cela permet d'appliquer le résultat avec une combinaison de fonctions sinusoïdales lorsque le jeu de valeurs propres est identiques

Deux résultats peuvent donc être donnés :

$$\text{Conditions de Dirichlet} \quad R_n(l_{r1}) = R_n(l_{r2}) = 0$$

$$R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} Sin\left(\frac{n\pi \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right) \Rightarrow \|R_n(r)\|^2 = \frac{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2}$$

$$\text{Conditions de Neumann} \quad \frac{dR_n(l_{r1})}{dr} = \frac{dR_n(l_{r2})}{dr} = 0$$

$$R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(2\frac{n\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} Cos\left(\frac{n\pi \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right) + Sin\left(\frac{n\pi \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)\right)$$

$$\text{Soit } R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_n Cos\left(\frac{n\pi \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right) + B_n Sin\left(\frac{n\pi \, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \|R_n(r)\|^2 = \frac{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2}\left(A_n^{\,2} + B_n^{\,2}\right)$$

$$A_n = 2\frac{n\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \quad et \quad B_n = 1$$

$$\Rightarrow \|R_n(r)\|^2 = \frac{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2}\left(1 + 4n^2\pi^2 Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{-2}\right)$$

Pour les problèmes combinés, conditions de Dirichlet en bas et de Neumann en haut :

$$Conditions\ R(l_{r1})=0 \quad et \quad \frac{dR(l_{r2})}{dr}=0$$

$$\nu_n \quad tq \quad Sin(\nu_n\alpha)=2\nu_n\, Cos(\nu_n\alpha)$$

$$R_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\,Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)$$

$$I=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, R_n(r)^2=\alpha\int_0^1 d\tau\,(\Psi_n(\tau))^2 \quad avec \quad \Psi_n(\tau)=Sin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

$$\|R_n(r)\|^2=\alpha\int_0^1 d\tau\,(Sin(\nu_n\alpha\,\tau))^2=\frac{\alpha}{2}\int_0^1 d\tau\,(1-Cos(2\nu_n\alpha\,\tau))$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left[\tau-\frac{Sin(2\nu_n\alpha\,\tau)}{2\nu_n\alpha}\right]_0^1=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{Sin(2\nu_n\alpha)}{2\nu_n\alpha}\right)=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{Sin(\nu_n\,\alpha)Cos(\nu_n\alpha)}{\nu_n\alpha}\right)$$

$$\|R_n(r)\|^2=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{2Cos(\nu_n\alpha)^2}{\alpha}\right)$$

mais aussi

$$\|R_n(r)\|^2=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{Sin(\nu_n\alpha)^2}{2\alpha\nu_n^{\ 2}}\right)$$

Avec le problème combiné, Conditions de Dirichlet en haut et de Neumann en bas, on change l'intégration :

$$\left.\begin{aligned} R_n(r)&=\frac{1}{\sqrt{r}}\Psi_n(r)\\ f(r)&\propto\frac{g(r)}{\sqrt{r}}\end{aligned}\right\} \quad I=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f(r)R_n(r) \quad \Psi_n(r)\propto A_nCos\left(\nu_nLog\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right)+B_nSin\left(\nu_nLog\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right)$$

$$\Psi_n(\tau)=A_nCos(\nu_n\alpha\,\tau)+B_nSin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

$$r'=\frac{r}{l_{r2}}\rightarrow e^t=r'\rightarrow\tau=-\frac{t}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)\Leftrightarrow t=-\alpha\,\tau$$

$$I=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f(r)R_n(r)=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\frac{g(r)}{r}\Psi_n(r)=\int_{l_{r1}/l_{r2}}^{1} dr'\frac{g(r')}{r'}\Psi_n(r')=\int_{-Log(l_{r2}/l_{r1})}^{0} dt\, g(t)\Psi_n(t)=\alpha\int_0^1 d\tau\, g(\tau)\Psi_n(\tau)$$

$$\Psi_n(\tau)=A_nCos(\nu_n\alpha\,\tau)+B_nSin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

En conséquence la norme est égale à :

$$Conditions\ \frac{dR(l_{r1})}{dr}=0 \quad et \quad R(l_{r2})=0$$

$$\nu_n \quad tq \quad Sin(\nu_n\alpha)=-2\nu_n\, Cos(\nu_n\alpha)$$

$$R_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right)\Rightarrow I=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\, R_n(r)^2=\alpha\int_0^1 d\tau\left(\Psi_n(\tau)\right)^2 \quad avec \quad \Psi_n(\tau)=Sin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

$$\|R_n(r)\|^2=\alpha\int_0^1 d\tau\left(Sin(\nu_n\alpha\,\tau)\right)^2=\frac{\alpha}{2}\int_0^1 d\tau\left(1-Cos(2\nu_n\alpha\,\tau)\right)=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{Sin(2\nu_n\alpha)}{2\nu_n\alpha}\right)=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{Sin(\nu_n\alpha)Cos(\nu_n\alpha)}{\nu_n\alpha}\right)$$

$$\|R_n(r)\|^2=\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{2Cos(\nu_n\alpha)^2}{\alpha}\right)$$

mais aussi

$$\|R_n(r)\|^2=\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{Sin(\nu_n\alpha)^2}{2\alpha\nu_n^{\ 2}}\right)$$

Calcul des normes en théorie de Sturm-Liouville

Dans le cadre d'un problème de Sturm-Liouville régulier

$$r\in[l_{r1},l_{r2}] \quad p(r)>0 \quad w(r)>0$$

$$-\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{d\Phi_\mu(r)}{dz}\right)+[s(r)-\mu\, w(r)]\Phi_\lambda(r)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{d\Phi_\mu(r)}{dr}\right)+[\mu\, w(r)-s(r)]\Phi_\mu(r)=0$$

$$\mu \quad valeur\ propre\ de\ l'opérateur\ de\ Sturm-Liouville$$

Les normes se calculent de la manière suivante :

$$\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\, w(r)\Phi_\mu(r)^2=\left[p(r)\left(\frac{\partial\Phi_\mu(r)}{\partial r}\frac{\partial\Phi_\mu(r)}{\partial\mu}-\Phi_\mu(r)\frac{\partial^2\Phi_\mu(r)}{\partial\mu\partial r}\right)\right]_{l_{r1}}^{l_{r2}}$$

On rappelle d'autre part que la valeur propre de l'opérateur de Sturm-Liouville dans notre problème était transformée de la manière suivante :

$$\mu=-p(p+1)\ \ forme\ de\ Legendre$$

$$Cas\ 1-4\mu<0\to p=\frac{-1\pm i\sqrt{4\mu-1}}{2}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{4\mu-1}}{2}$$

$$En\ posant\,\nu=\frac{\sqrt{4\mu-1}}{2}\Rightarrow p=-\frac{1}{2}+i\nu$$

En conséquence les dérivées paramétriques sur les valeurs propres changent de nature :

$$En\ posant\,\nu=\frac{\sqrt{4\mu-1}}{2}\Rightarrow\mu=\nu^2+\frac{1}{4}\Rightarrow d\mu=2\nu d\nu$$

Appliquées ces formules à notre problème, il vient :

$$p(r)=r^2 \quad w(r)=1 \quad \Phi_\nu(r)\to R_\nu(r)$$

$$\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\, R_\nu(r)^2=\frac{1}{2\nu}\left[r^2\left(\frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r}\frac{\partial R_\nu(r)}{\partial\nu}-R_\nu(r)\frac{\partial^2R_\nu(r)}{\partial\nu\partial r}\right)\right]_{l_{r1}}^{l_{r2}}.$$

Rappelons également les valeurs des dérivées premières en coordonnées et en paramètres pour une des formes des fonctions propres :

$$Posons \quad t = Log(r) \quad t_1 = Log(l_{r1}) \quad t_2 = Log(l_{r2}) \rightarrow \tau = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad \alpha = t_2 - t_1 = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{(t - t_1)}{\alpha} \rightarrow t = t_1 + \alpha\,\tau \Leftrightarrow \alpha\,\tau = Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right) \Leftrightarrow r = l_{r1} e^{\alpha\,\tau}$$

$$Posons \; R'_{\nu,r}(r) = \frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r} \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \tau} \quad et \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \nu}$$

$$R_\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(A\,Cos\left(\nu\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + B\,Sin\left(\nu\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) \Rightarrow \quad R'_{\nu,r}(r) = \frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)}{\alpha\,r} = \frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)e^{-\alpha\,\tau}}{\alpha\,l_{r1}}$$

$$R_\nu(\tau) = \frac{1}{\sqrt{l_{r1}}} e^{-\frac{\alpha\,\tau}{2}} \left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) + B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}} e^{-\frac{\alpha\,\tau}{2}} \left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(B\,\nu - \frac{A}{2}\right) - Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\left(A\,\nu + \frac{B}{2}\right)\right)$$

$$R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\alpha\,\tau}{\sqrt{l_{r1}}} e^{-\frac{\alpha\,\tau}{2}} \left(-A\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau) + B\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu\,\partial \tau} = \frac{\partial R'_{\nu,\tau}(\tau)}{\partial \nu} = \frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}} e^{-\frac{\alpha\,\tau}{2}} \left(\left(B\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) - A\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right) - \alpha\,\tau\left(Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\left(B\,\nu - \frac{A}{2}\right) + Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(A\,\nu + \frac{B}{2}\right)\right)\right)$$

Exprimons la norme à l'aide de la variable normalisée τ, il vient :

$$Posons \; R'_{\nu,r}(r) = \frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r} \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \tau} et \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \nu} \quad r = l_{r1} e^{\alpha\,\tau}$$

$$R'_{\nu,r}(r) = \frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)e^{-\alpha\,\tau}}{\alpha\,l_{r1}} \quad et \quad \frac{\partial^2 R_\nu(r)}{\partial \nu \partial r} = \frac{e^{-\alpha\,\tau}}{\alpha\,l_{r1}} \frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau}$$

$$\Rightarrow \left\|R_\nu(r)\right\|^2 = \frac{l_{r1}}{2\,\alpha\,\nu}\left[e^{\alpha\,\tau}\left(\frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \nu} - R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau}\right)\right]_0^1$$

$$\left\|R_\nu(r)\right\|^2 = \frac{l_{r1}}{2\,\alpha\,\nu}\left[e^{\alpha\,\tau}\left(R'_{\nu,\tau}(\tau)R'_{\nu,\nu}(\tau) - R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau}\right)\right]_0^1$$

Retrouvons alors les résultats des normes dans le cas de Dirichlet de part et d'autres :

$$Condition\;de\;Dirichlet \Rightarrow \left[R_\nu(\tau)\right]_0^1 = 0 \quad et \quad \left[Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right]_0^1 = 0 \quad \left[Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\right]_0^1 = \pm 1 \Rightarrow \left[Cos^2(\nu\,\alpha\,\tau)\right]_0^1 = 1$$

$$A = 0, B = 1$$

$$R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}} e^{-\frac{\alpha\,\tau}{2}} \nu\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\alpha\,\tau}{\sqrt{l_{r1}}} e^{-\frac{\alpha\,\tau}{2}} Cos(\nu\,\alpha\,\tau)$$

$$\left\|R_\nu(r)\right\|^2 = \frac{\alpha}{2}\left[\,\tau\,Cos^2(\nu\,\alpha\,\tau)\right]_0^1 = \frac{\alpha}{2}$$

.

Dans le cas Dirichlet en bas et Neumann en haut, il vient :

$$R_\nu(0)=0 \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(1)=0$$

$$\nu_n \quad tq \quad Sin(\nu_n\alpha)=2\nu_n\,Cos(\nu_n\alpha) \quad A=0, B=1 \Rightarrow R_\nu(\tau)=\frac{1}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}Sin(\nu\,\alpha\,\tau)$$

$$\Rightarrow R'_{\nu,\tau}(\tau)=\frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)-\frac{Sin(\nu\,\alpha\,\tau)}{2}\right) \quad R'_{\nu,\nu}(\tau)=\frac{\alpha\,\tau}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}Cos(\nu\,\alpha\,\tau)$$

$$\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial\nu\partial\tau}=\frac{\alpha\,e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}}{\sqrt{l_{r1}}}\left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(1-\frac{\alpha\,\tau}{2}\right)-\nu\,\alpha\,\tau\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\Rightarrow R'_{\nu,\tau}(0)=\frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}}\nu \quad R'_{\nu,\nu}(0)=0 \quad \frac{\partial^2 R_\nu(0)}{\partial\nu\partial\tau}=\frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}}$$

$$R'_{\nu,\tau}(1)=\frac{e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{l_{r1}}}\alpha\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha)-\frac{Sin(\nu\,\alpha)}{2}\right) \quad R'_{\nu,\nu}(1)=\frac{e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{l_{r1}}}\alpha\,Cos(\nu\,\alpha)$$

$$R_\nu(1)=\frac{e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{l_{r1}}}Sin(\nu\,\alpha) \quad \frac{\partial^2 R_\nu(1)}{\partial\nu\partial\tau}=\frac{e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{l_{r1}}}\alpha\left(Cos(\nu\,\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-\nu\,\alpha\,Sin(\nu\,\alpha)\right)$$

$$\|R_\nu(r)\|^2=\frac{l_{r1}}{2\alpha\,\nu}\left[e^{\alpha\tau}\left(R'_{\nu,\tau}(\tau)R'_{\nu,\nu}(\tau)-R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial\nu\partial\tau}\right)\right]_0^1=\frac{l_{r1}}{2\alpha\,\nu}e^{\alpha}\left(R'_{\nu,\tau}(1)R'_{\nu,\nu}(1)-R_\nu(1)\frac{\partial^2 R_\nu(1)}{\partial\nu\partial\tau}\right)$$

$$=\frac{1}{2\alpha\,\nu}\left(\alpha\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha)-\frac{Sin(\nu\,\alpha)}{2}\right)\alpha\,Cos(\nu\,\alpha)-Sin(\nu\,\alpha)\alpha\left(Cos(\nu\,\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-\nu\,\alpha\,Sin(\nu\,\alpha)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\nu}\left(\nu\,\alpha-Sin(\nu\,\alpha)Cos(\nu\,\alpha)\right)=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{Sin(\nu\,\alpha)Cos(\nu\,\alpha)}{\nu\,\alpha}\right)$$

Ce qui est le résultat déjà trouvé en calculant directement l'intégrale !

Rappelons également les valeurs des dérivées premières en coordonnées et en paramètres pour la deuxième forme choisie des fonctions propres (cas Neumann en bas et Dirichlet en haut):

$$Posons \quad t = Log(r) \quad t_1 = Log(l_{r1}) \quad t_2 = Log(l_{r2}) \rightarrow \tau = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \quad \alpha = t_2 - t_1 = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{t_2 - t}{\alpha} \rightarrow t = t_2 - \alpha\,\tau \Leftrightarrow \alpha\,\tau = Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right) \Leftrightarrow r = l_{r2} e^{-\alpha\,\tau}$$

$$Posons\ R'_{\nu,r}(r) = \frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r} \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \tau} \quad et \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \nu}$$

$$R_\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(A\,Cos\left(\nu\,Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right) + B\,Sin\left(\nu\,Log\left(\frac{l_{r2}}{r}\right)\right)\right) \Rightarrow \quad R'_{\nu,r}(r) = -\frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)}{\alpha\,r} = -\frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)e^{\alpha\,\tau}}{\alpha\,l_{r2}}$$

$$R_\nu(\tau) = \frac{1}{\sqrt{l_{r2}}} e^{\frac{\alpha\,\tau}{2}}\left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) + B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\alpha}{\sqrt{l_{r2}}} e^{\frac{\alpha\,\tau}{2}}\left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(B\,\nu + \frac{A}{2}\right) - Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\left(A\,\nu - \frac{B}{2}\right)\right)$$

$$R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\alpha\,\tau}{\sqrt{l_{r2}}} e^{\frac{\alpha\,\tau}{2}}\left(-A\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau) + B\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu\,\partial \tau} = \frac{\partial R'_{\nu,\tau}(\tau)}{\partial \nu} = \frac{\alpha}{\sqrt{l_{r2}}} e^{\frac{\alpha\,\tau}{2}}\left(\left(B\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) - A\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right) - \alpha\,\tau\left(Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\left(B\,\nu + \frac{A}{2}\right) + Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(A\,\nu - \frac{B}{2}\right)\right)\right)$$

Exprimons la norme à l'aide de la variable normalisée τ, il vient :

$$Posons\ R'_{\nu,r}(r) = \frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r} \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \tau} et \quad R'_{\nu,\nu}(\tau) = \frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \nu} \quad r = l_{r2}e^{-\alpha\,\tau}$$

$$R'_{\nu,r}(r) = \frac{R'_{\nu,\tau}(\tau)e^{\alpha\,\tau}}{\alpha\,l_{r2}} \quad et \quad \frac{\partial^2 R_\nu(r)}{\partial \nu \partial r} = -\frac{e^{\alpha\,\tau}}{\alpha\,l_{r2}}\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau}$$

$$\Rightarrow \left\|R_\nu(r)\right\|^2 = -\frac{l_{r2}}{2\,\alpha\,\nu}\left[e^{-\alpha\,\tau}\left(\frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial R_\nu(\tau)}{\partial \nu} - R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau}\right)\right]_1^0$$

$$\left\|R_\nu(r)\right\|^2 = \frac{l_{r2}}{2\,\alpha\,\nu}\left[e^{-\alpha\,\tau}\left(R'_{\nu,\tau}(\tau)R'_{\nu,\nu}(\tau) - R_\nu(\tau)\frac{\partial^2 R_\nu(\tau)}{\partial \nu \partial \tau}\right)\right]_0^1$$

Dans le cas Dirichlet en haut et Neumann en bas , il vient :

$$R_\nu(0)=0 \quad et \quad R'_{\nu,\tau}(1)=0$$

$$\nu_n \quad tq \quad Sin(\nu_n\alpha)=-2\nu_n\,Cos(\nu_n\alpha) \quad A=0,B=1\Rightarrow R_\nu(\tau)=\frac{1}{\sqrt{l_{r2}}}e^{\frac{\alpha\tau}{2}}Sin(\nu\,\alpha\,\tau)$$

$$\Rightarrow R'_{\nu,\tau}(\tau)=\frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}}e^{\frac{\alpha\tau}{2}}\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau)+\frac{Sin(\nu\,\alpha\,\tau)}{2}\right) \quad R'_{\nu,\nu}(\tau)=\frac{\alpha\,\tau}{\sqrt{l_{r2}}}e^{\frac{\alpha\tau}{2}}Cos(\nu\,\alpha\,\tau)$$

$$\frac{\partial^2R_\nu(\tau)}{\partial\nu\partial\tau}=\frac{\alpha\,e^{\frac{\alpha\tau}{2}}}{\sqrt{l_{r2}}}\left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(1+\frac{\alpha\,\tau}{2}\right)-\nu\,\alpha\,\tau\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\Rightarrow R'_{\nu,\tau}(0)=\frac{\alpha}{\sqrt{l_{r2}}}\nu \quad R'_{\nu,\nu}(0)=0 \quad \frac{\partial^2R_\nu(0)}{\partial\nu\partial\tau}=\frac{\alpha}{\sqrt{l_{r2}}}$$

$$R'_{\nu,\tau}(1)=\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{l_{r2}}}\alpha\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha)+\frac{Sin(\nu\,\alpha)}{2}\right) \quad R'_{\nu,\nu}(1)=\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{l_{r2}}}\alpha\,Cos(\nu\,\alpha)$$

$$R_\nu(1)=\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{l_{r2}}}Sin(\nu\,\alpha) \quad \frac{\partial^2R_\nu(1)}{\partial\nu\partial\tau}=\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{l_{ré}}}\alpha\left(Cos(\nu\,\alpha)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\nu\,\alpha\,Sin(\nu\,\alpha)\right)$$

$$\|R_\nu(r)\|^2=\frac{l_{r2}}{2\alpha\,\nu}\left[e^{-\alpha\tau}\left(R'_{\nu,\tau}(\tau)R'_{\nu,\nu}(\tau)-R_\nu(\tau)\frac{\partial^2R_\nu(\tau)}{\partial\nu\partial\tau}\right)\right]_0^1=\frac{l_{r2}}{2\alpha\,\nu}e^{\alpha}\left(R'_{\nu,\tau}(1)R'_{\nu,\nu}(1)-R_\nu(1)\frac{\partial^2R_\nu(1)}{\partial\nu\partial\tau}\right)$$

$$=\frac{1}{2\alpha\,\nu}\left(\alpha\left(\nu\,Cos(\nu\,\alpha)+\frac{Sin(\nu\,\alpha)}{2}\right)\alpha\,Cos(\nu\,\alpha)-Sin(\nu\,\alpha)\alpha\left(Cos(\nu\,\alpha)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\nu\,\alpha\,Sin(\nu\,\alpha)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\nu}\big(\nu\,\alpha-Sin(\nu\,\alpha)Cos(\nu\,\alpha)\big)=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{Sin(\nu\,\alpha)Cos(\nu\,\alpha)}{\nu\,\alpha}\right)$$

Ce qui est le résultat déjà trouvé en calculant directement l'intégrale !

Il ne reste plus qu'à calculer par ce moyen, la norme pour des conditions homogènes de Neumann de part et d'autre, donnons l'expression la plus générale de la norme quelque soit les coefficients A,B, il vient après une session de calcul sur Mathematica :

$$\|R_\nu(r)\|^2=\frac{1}{2\nu}\left(A\,B+\alpha\,\nu\left(A^2+B^2\right)-A\,B\,Cos(2\alpha\,\nu)-\frac{\left(A^2-B^2\right)}{2}Sin(2\alpha\,\nu)\right)$$

Pour les conditions homogènes de Neumann de part et d'autre, on retrouve la norme calculée.

$$Si\ A=2\nu \quad et \quad B=1 \quad et \quad Sin(2\alpha\,\nu)=0 \quad et \quad Cos(2\alpha\,\nu)=1 \quad il\ vient:$$

$$\|R_\nu(r)\|^2=\frac{\alpha}{2}\left(1+4\nu^2\right)$$

Formes des fonctions angulaires associées

Les fonctions angulaires associées sont solutions de l'équation différentielle :

$Si\; 1-4\mu<0 \quad \lambda(\lambda+1)=-\mu$

$\rightarrow \lambda=\dfrac{-1\pm i\sqrt{4\mu-1}}{2}\rightarrow \lambda=-\dfrac{1}{2}+i\nu$

$En\ posant\ \nu=\dfrac{\sqrt{4\mu-1}}{2}$

$$\Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+[\lambda(\lambda+1)]\Theta(\theta)=0\Rightarrow \Theta_\nu(\theta)=A\,P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(Cos(\theta))+B\,Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}(Cos(\theta))$$

$P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)$ *Fonction de Legendre de degré* $-\dfrac{1}{2}+i\nu$

$Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)$ *Fonction de Legendre de deuxième espèce de degré* $-\dfrac{1}{2}+i\nu$

Aussi appelées fonctions coniques ou fonctions de Mehler

Sans oublier la solution de valeur propre nulle des équations séparées:

$$\Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)=0\Rightarrow \Theta_0(\theta)=A+B\,Log\left(Cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=C+D\,Log\left(Tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=E+F\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)$$

On rappelle que les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce sont reliées par les formules de liaison :

$$P_\tau(z)=-\frac{2}{\pi\,Sin(\tau\pi)}\left(Cos(\tau\pi)Q_\tau(z)+Q_\tau(-z)\right)\quad Q_\tau(z)=\frac{\pi}{2Sin(\tau\pi)}\left(Cos(\tau\pi)P_\tau(z)-P_\tau(-z)\right).$$

Lorsque τ=-1/2+i ν, il vient :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)=-\frac{2}{\pi\,Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)+Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)=\frac{\pi}{2Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)-P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)$$

$$e^{\frac{i}{2}\pi}=i\quad e^{-\frac{i}{2}\pi}=-i\Rightarrow Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)=\frac{e^{-\nu\pi-\frac{i}{2}\pi}+e^{\nu\pi+\frac{i}{2}\pi}}{2}=i\frac{-e^{-\nu\pi}+e^{\nu\pi}}{2}=i\,Sinh(\nu\pi)$$

$$Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\pi\right)=\frac{e^{-\nu\pi-\frac{i}{2}\pi}-e^{\nu\pi+\frac{i}{2}\pi}}{2i}=-i\frac{e^{-\nu\pi}+e^{\nu\pi}}{2i}=-Cosh(\nu\pi)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)=-\frac{\pi}{-2Cosh(\nu\pi)}\left(i\,Sinh(\nu\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)-P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)\right)=\frac{\pi}{2\,Cosh(\nu\pi)}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)-i\,Sinh(\nu\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right)$$

Il est facile de démontrer la valeur réelle de la fonction de première espèce, en utilisant la propriété miroir des fonctions de Legendre :

$$\left.\begin{matrix}P_{\bar\tau}(\bar z)=\overline{P_\tau(z)}\\ P_{-\tau}(z)=P_{\tau-1}(z)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \tau=-\frac{1}{2}+i\nu\rightarrow\bar\tau=-\frac{1}{2}-i\nu=-\left(\frac{1}{2}+i\nu\right)=-(\tau+1)$$

$$\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x)}=P_{-\frac{1}{2}-i\nu}(x)=P_{\tau+1-1}(x)=P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x)\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x)\quad réel$$

La fonction de Legendre de première espèce est à valeur réelle et on l'appelle communément la fonction conique de première espèce ou fonction de Mehler. On voit que le calcul de la fonction de Legendre de deuxième espèce donne un résultat imaginaire. Il faut alors choisir une valeur réelle pour une fonction de deuxième espèce. Certains ont choisit cette dernière fonction, en prenant comme valeur à définir sa partie réelle, comme fonction conique de deuxième espèce :

$$\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) = Re\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right) = \frac{\pi}{2\,Cosh(\nu\pi)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z).$$

En effet, on ne peut prendre la partie imaginaire $\operatorname{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\right) = -\frac{\pi\, Sinh(\nu\pi)}{2\,Cosh(\nu\pi)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)$ *car cette dernière n'est pas linéairement indépendante de la fonction conique de première espèce. Au passage il est évident que la partie réelle d'une fonction à valeur imaginaire, tout comme sa partie imaginaire respecte également l'équation différentielle à partir du moment où tous les autres éléments de l'équation différentielle sont à valeur purement réelle. L'association entre fonctions radiales et angulaires est donc la suivante :*

ν_n *valeurs définies par les conditions aux limites homogènes radiales*

$$\Phi_n^r(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_n^r\, Cos\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + B_n^r\, Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) \leftrightarrow \Phi_n^\theta(\theta) = A_n^\theta P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta)\right) + B_n^\theta \hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta)\right)$$

Toute solution du problème aux limites présente le développement en série suivant :

$$T(r,\theta) = \left(A_0^r + \frac{B_0^r}{r}\right)\left(A_0^\theta + B_0^\theta Log\left(tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_n^r\, Cos\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + B_n^r\, Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\left(A_n^\theta P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta)\right) + B_n^\theta \hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta)\right)\right)$$

Exemple : soit le problème aux limites :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_0=Cos(\theta_0) \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_0}=f_r(r)$$

On écarte rapidement la partie de valeur propre 0 identiquement nulle, et d'après l'étude des fonctions propres la solution se développe en série ainsi :

$$T(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta)) \qquad \nu_n=\frac{n\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \quad R_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}Sin\left(\nu_n\ Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)$$

$$\Psi_n(r)=Sin\left(\nu_n\ Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \quad \Psi_n(\tau)=Sin(\nu_n\alpha\,\tau) \quad A_n=\frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ f_r(r)R_n(r)}{\|R_n(r)\|^2P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta_0))}=\frac{2\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ f_r(r)R_n(r)}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta_0))}$$

$$\|R_n(r)\|^2=\frac{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}{2} \quad Normalisation\ de\ l'intégrale \quad r\to e^t=\frac{r}{l_{r1}}\to\tau=\frac{t}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\Leftrightarrow r=l_{r1}e^{\alpha\tau} \quad t=\alpha\,\tau$$

$$I_n=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ f_r(r)R_n(r)=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\frac{f_r(r)}{\sqrt{r}}\Psi_n(r)=\sqrt{l_{r1}}\int_0^{Log(l_{r2}/l_{r1})}dt\ f_r(t)e^{\frac{t}{2}}\Psi_n(t)=\alpha\sqrt{l_{r1}}\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}}f_r(\tau)\Psi_n(\tau) \quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$I_n=\alpha\sqrt{l_{r1}}S_n\Rightarrow S_n=\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}}f_r(\tau)Sin(\nu_n\alpha\,\tau)\Rightarrow T(r,\theta)=2\frac{\sqrt{l_{r1}}}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}S_n Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta_0))}$$

Supposons que la fonction limite est constante $f_r(r)=T_s$*, il vient :*

$$f_r(\tau)=T_s\Rightarrow S_n=T_s\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}}Sin(\nu_n\alpha\,\tau) \quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad Cos(\nu_n\alpha)=(-1)^n \quad e^{-\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{l_{r1}}{l_{r2}}}$$

$$S_n=\frac{4T_s\nu_n}{\alpha}\frac{1-e^{\frac{\alpha}{2}}Cos(\nu_n\alpha)}{1+4\nu_n^{\,2}}=4T_s n\pi\frac{1-\sqrt{\frac{l_{r2}}{l_{r1}}}(-1)^n}{\alpha^2+4n^2\pi^2}=\frac{4T_s}{\sqrt{l_{r1}}}\frac{n\pi\left(\sqrt{l_{r1}}-\sqrt{l_{r2}}(-1)^n\right)}{\left(\alpha^2+4n^2\pi^2\right)}$$

$$T(r,\theta)=\frac{8T_s}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi\left(\sqrt{l_{r1}}-\sqrt{l_{r2}}(-1)^n\right)}{\alpha^2+4n^2\pi^2}Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta_0))} \qquad \nu_n=\frac{n\pi}{\alpha}$$

.

Supposons que la fonction limite soit de la forme : $f_r(r)=T_s/\sqrt{r}$*, il vient :*

$$f_r(r)=T_s\sqrt{\frac{l_{r1}}{r}}\Rightarrow f_r(\tau)=T_s e^{-\frac{\alpha\tau}{2}} \quad \nu_n=\frac{n\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)}\Rightarrow Cos(\alpha\,\nu_n)=(-1)^n \quad et \quad Sin(\alpha\,\nu_n)=0$$

$$S_n=T_s\int_0^1 d\tau\ Sin(\nu_n\alpha\,\tau)=\frac{1-(-1)^n}{\alpha\,\nu_n}\Rightarrow S_{2n}=0 \quad S_{2n+1}=T_s\frac{2}{(2n+1)\pi}$$

$$T(r,\theta)=\frac{4T_s}{\pi}\frac{\sqrt{l_{r1}}}{\sqrt{r}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Sin\left(\nu_{2n+1}\ Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{2n+1}}(Cos(\theta))}{(2n+1)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{2n+1}}(Cos(\theta_0))}$$

.

Exemple : soit le problème aux limites :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$T_r^{'}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r1}}=0$$

$$T_r^{'}(r,\theta)\Big|_{r=l_{r2}}=0$$

$$T(r,z)\Big|_{z=\mu_0}=f_r(r)$$

.

La partie radiale de la solution de valeur propre nulle A_0+B_0/r donne une constante dans ce cas. Et la partie angulaire donne également une constante, du fait du respect de la condition de finitude de la solution à angle ϑ=0. D'après l'étude des fonctions propres la solution se développe don en série ainsi :

$$R_0(r)=A_0^r+\frac{B_0^r}{r}\Rightarrow C.L.Neumann\rightarrow B_0^r=0 \quad et \quad R_0(r)\propto 1 \quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$\Theta_0(\theta)=A_0^\theta+B_0^\theta\ Log\left(tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \lim_{\theta\to 0} Log\left(tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=-\infty\Rightarrow B_0^\theta=0 \quad et \quad \Theta_0(\theta)\propto 1$$

$$T(r,\theta)=A_0+\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\left(2\nu_n Cos\left(\nu_n\ Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)+Sin\left(\nu_n\ Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta)\right) \qquad \nu_n=\frac{n\pi}{\alpha}$$

$$R_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(2\nu_n Cos\left(\nu_n\ Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)+Sin\left(\nu_n\ Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) \quad \Psi_n(\tau)=2\nu_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau)+Sin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

$$A_0=\frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ f_r(r)}{\left\|R_0(r)\right\|^2}=\frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ f_r(r)}{l_{r2}-l_{r1}} \quad \left\|R_0(r)\right\|^2=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr=l_{r2}-l_{r1}$$

$$A_n=\frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ f_r(r)R_n(r)}{\left\|R_n(r)\right\|^2}=\frac{2\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ f_r(r)R_n(r)}{\alpha\left(1+4{\nu_n}^2\right)}\Leftarrow\left\|R_n(r)\right\|^2=\frac{\alpha}{2}\left(1+4{\nu_n}^2\right)$$

$$Normalisation\ de\ l'intégrale \quad r\rightarrow e^t=\frac{r}{l_{r1}}\rightarrow\tau=\frac{t}{\alpha}\Leftrightarrow r=l_{r1}e^{\alpha\tau} \quad t=\alpha\,\tau$$

$$I_n=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ f_r(r)R_n(r)=\alpha\sqrt{l_{r1}}\int_0^1 d\tau\,e^{\frac{\alpha\tau}{2}}f_r(\tau)\left(2\nu_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau)+Sin(\nu_n\alpha\,\tau)\right)$$

$$\Rightarrow S_n=\int_0^1 d\tau\,e^{\frac{\alpha\tau}{2}}f_r(\tau)\left(2\nu_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau)+Sin(\nu_n\alpha\,\tau)\right) \quad S_0=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\ f_r(r)$$

$$T(r,\theta)=\frac{S_0}{l_{r2}-l_{r1}}+2\frac{\sqrt{l_{r1}}}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_n}{\left(1+4{\nu_n}^2\right)}\left(2\nu_n Cos\left(\nu_n\ Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)+Sin\left(\nu_n\ Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta_0)\right)}$$

$$avec \quad \nu_n=\frac{n\pi}{\alpha}$$

.

Supposons que la fonction limite est constante = Ts, il vient immédiatement S_n =0 :

$$S_n = T_s \int_0^1 d\tau \, e^{\frac{\alpha\tau}{2}} \left(2\nu_n Cos(\nu_n \alpha \tau) + Sin(\nu_n \alpha \tau)\right) = 0 \quad S_0 = T_s \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr = T_s \left(l_{r2} - l_{r1}\right)$$

$$\nu_n = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \quad puisque \quad Sin(\nu_n \alpha \tau) = 0$$

et la solution se réduit bien à la valeur triviale T(r,ϑ)= Ts

Avec une fonction limite de la forme : $f_r(r) = \frac{T_s}{\sqrt{r}}$ *, il vient*

$$f_r(r) = T_s \sqrt{\frac{l_{r1}}{r}} \Rightarrow f_r(\tau) = T_s e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$$

$$\nu_n = \frac{n\pi}{Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)} \Rightarrow Cos(\alpha \nu_n) = (-1)^n \quad et \quad Sin(\alpha \nu_n) = 0$$

$$S_n = T_s \int_0^1 d\tau \left(2\nu_n Cos(\nu_n \alpha \tau) + Sin(\nu_n \alpha \tau)\right) = T_s \frac{1 - Cos(\alpha \nu_n)}{\alpha \nu_n} \Rightarrow S_{2n} = 0 \quad S_{2n+1} = T_s \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

$$S_0 = T_s \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} \sqrt{\frac{l_{r1}}{r}} dr = 2T_s \sqrt{l_{r1}} \left(\sqrt{l_{r2}} - \sqrt{l_{r1}}\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{2T_s \sqrt{l_{r1}}}{\left(\sqrt{l_{r2}} + \sqrt{l_{r1}}\right)} + \frac{4T_s}{\pi} \frac{\sqrt{l_{r1}}}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\nu_{2n+1} Cos\left(\nu_{2n+1} Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + Sin\left(\nu_{2n+1} Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{2n+1}}\left(Cos(\theta)\right)}{\left(1 + 4\nu_{2n+1}{}^2\right)(2n+1) P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{2n+1}}\left(Cos(\theta_0)\right)}$$

Exemple : soit le problème aux limites :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_0}=f_r(r)$$

On écarte rapidement la partie de valeur propre 0 identiquement nulle, et d'après l'étude des fonctions propres la solution se développe en série ainsi :

$$T(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta)\right) \qquad \nu_n \quad tq \quad Sin(\nu_n\alpha)=2\nu_n\, Cos(\nu_n\alpha) \quad \alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)$$

$$R_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) \quad A_n=\frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_r(r)R_n(r)}{\|R_n(r)\|^2 P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta_0)\right)}=\frac{2\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_r(r)R_n(r)}{\alpha\left(1-\frac{Sin(\nu_n\,\alpha)Cos(\nu_n\alpha)}{\nu_n\alpha}\right)P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta_0)\right)}$$

$$\|R_n(r)\|^2=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{Sin(\nu_n\,\alpha)Cos(\nu_n\alpha)}{\nu_n\alpha}\right) \quad Normalisation\ de\ l'intégrale$$

$$I_n=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_r(r)R_n(r)=\alpha\sqrt{l_{r1}}\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}} f_r(\tau)\Psi_n(\tau)=\alpha\sqrt{l_{r1}}S_n \Rightarrow S_n=\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}} f_r(\tau)Sin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=2\frac{\sqrt{l_{r1}}}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}S_n\frac{Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)}{\left(1-\frac{Sin(\nu_n\,\alpha)Cos(\nu_n\alpha)}{\nu_n\alpha}\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta_0)\right)}$$

Supposons que la fonction limite est constante $f_r(r)=T_s$*, il vient :*

$$\alpha=Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad f_r(\tau)=T_s \Rightarrow S_n=T_s\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}} Sin(\nu_n\alpha\,\tau) \Rightarrow S_n=T_s\frac{4\nu_n}{\alpha\left(1+4\nu_n^{\,2}\right)}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{8T_s}{\alpha}\frac{\sqrt{l_{r1}}}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\nu_n}{\left(1+4\nu_n^{\,2}\right)}\frac{Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)}{\left(1-\frac{Sin(\nu_n\,\alpha)Cos(\nu_n\alpha)}{\nu_n\alpha}\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta_0)\right)}$$

$$\nu_n \quad tq \quad Sin(\nu_n\alpha)=2\nu_n\, Cos(\nu_n\alpha)$$

Supposons que la fonction limite soit de la forme : $f_r(r)=\frac{T_s}{\sqrt{r}}$ *, il vient :*

$$f_r(r)=T_s\sqrt{\frac{l_{r1}}{r}} \Rightarrow f_r(\tau)=T_s e^{-\frac{\alpha\tau}{2}} \quad \nu_n \quad tq \quad Sin(\nu_n\alpha)=2\nu_n\, Cos(\nu_n\alpha)$$

$$S_n=T_s\int_0^1 d\tau\, Sin(\nu_n\alpha\,\tau)=T_s\frac{1-Cos(\nu_n\alpha)}{\alpha\,\nu_n}$$

$$T(r,\theta)=2T_s\frac{\sqrt{l_{r1}}}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-Cos(\nu_n\alpha)\right)Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)}{\left(\nu_n\alpha-Sin(\nu_n\,\alpha)Cos(\nu_n\alpha)\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}\left(Cos(\theta_0)\right)}$$

Exemple : soit le problème aux limites sur une section conique-sphérique :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$
$$T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_1}=f_1(r) \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_2}=f_2(r).$$

Qui se décompose en deux sous-problèmes :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$
$$T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_1}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_2}=f_2(r)$$

ainsi que :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$
$$T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T'(r,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=0 \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_1}=f_1(r) \quad T(r,z)\big|_{z=\mu_2}=0$$

Le premier problème se résout par les calculs suivants sur la partie angulaire :

$$Valeur\ \ propre\ radiale\ nulle \Rightarrow \Theta_0(\theta)=A_0^\theta+B_0^\theta\ Log\left(Tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=C_0^\theta+D_0^\theta\ Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)$$

$$Tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)+1} \quad \theta\in[0,\pi],\ Sin(\theta)=\sqrt{1-Cos^2(\theta)} \Rightarrow Tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{1-Cos^2(\theta)}}{Cos(\theta)+1}=\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}}$$

$$Tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}} \quad Tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}}$$

$$Valeur\ \ propre\ radiale\ non\ nulle \Rightarrow \Phi_n^\theta(z)=A_n^\theta P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(z)+B_n^\theta \hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(z)$$

$$T(r,z)\big|_{z=\mu_1}=0 \Rightarrow \Phi_n^\theta(z)\propto \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(\mu_1)}-\frac{\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(z)}{\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(\mu_1)} \qquad \Theta_0(\theta)\propto 1-\frac{Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)}$$

Ainsi que sur la partie radiale permettant de donner l'expression du premier problème :

$$R_0(r) = A_0 + \frac{B_0}{r} \Rightarrow C.L.Neumann \rightarrow B_0 = 0 \quad et \quad R_0(r) \propto 1 \quad \alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad \left\|R_0(r)\right\|^2 = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr = l_{r2} - l_{r1}$$

$$R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(2\nu_n Cos\left(\nu_n\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) \quad \Psi_n(\tau) = 2\nu_n Cos(\nu_n \alpha\, \tau) + Sin(\nu_n \alpha\, \tau)$$

$$\left\|R_n(r)\right\|^2 = \frac{\alpha\left(1+4\nu_n^{\ 2}\right)}{2} \quad \Theta_0(\theta) = 1 - \frac{Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)} \quad \Phi_n^{\mu_1}(z) = \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(\mu_1)} - \frac{\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(z)}{\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = A_0\Theta_0(\theta) + \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\left(2\nu_n Cos\left(\nu_n\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\Phi_n^{\mu_1}\left(Cos(\theta)\right) \qquad \nu_n = \frac{n\pi}{\alpha}$$

$$A_0 = \frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_2(r)}{\left\|R_0(r)\right\|^2 \Theta_0(\mu_2)} = \frac{\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_2(r)}{(l_{r2} - l_{r1})\Theta_0(\mu_2)} \quad A_n = \frac{2\int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_2(r) R_n(r)}{\alpha\left(1+4\nu_n^{\ 2}\right)\Phi_n^{\theta}(\mu_2)} \quad \Theta_0(\mu_2) = 1 - \frac{Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)}$$

$$Normalisation\, de\, l'intégrale \quad r \rightarrow e^t = \frac{r}{l_{r1}} \rightarrow \tau = \frac{t}{\alpha} \Leftrightarrow r = l_{r1} e^{\alpha\tau} \quad t = \alpha\,\tau$$

$$I_n = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_2(r) R_n(r) = \alpha\sqrt{l_{r1}}\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}} f_2(\tau)\left(2\nu_n Cos(\nu_n \alpha\, \tau) + Sin(\nu_n \alpha\, \tau)\right)$$

$$\Rightarrow S_{n,2} = \int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}} f_2(\tau)\left(2\nu_n Cos(\nu_n \alpha\, \tau) + Sin(\nu_n \alpha\, \tau)\right) \quad S_{0,2} = \int_{l_{r1}}^{l_{r2}} dr\, f_2(r)$$

$$T(r,\theta) = \frac{S_{0,2}\left(Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right) - Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{(l_{r2} - l_{r1})\left(Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right) - Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)\right)} +$$

$$+ 2\frac{\sqrt{l_{r1}}}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n,2}}{\left(1+4\nu_n^{\ 2}\right)}\left(2\nu_n Cos\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + Sin\left(\nu_n\, Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\frac{\Phi_n^{\theta}\left(Cos(\theta)\right)}{\Phi_n^{\theta}(\mu_2)} \qquad avec \quad \nu_n = \frac{n\pi}{\alpha}$$

L'expression du deuxième problème donne :

$$R_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(2\nu_n Cos\left(\nu_n\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)+Sin\left(\nu_n\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\quad \Psi_n(\tau)=2\nu_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau)+Sin(\nu_n\alpha\,\tau)$$

$$\Theta_0(\theta)=1-\frac{Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}\quad \Phi_n^{\mu_2}(z)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(\mu_2)}-\frac{\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(z)}{\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(\mu_2)}$$

$$\Rightarrow S_{n,1}=\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}}f_1(\tau)(2\nu_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau)+Sin(\nu_n\alpha\,\tau))\quad S_{0,1}=\int_{l_{r1}}^{l_{r2}}dr\,f_1(r)$$

$$T(r,\theta)=\frac{S_{0,1}\left(Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)-Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{(l_{r2}-l_{r1})\left(Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)-Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\right)}+$$

$$+2\frac{\sqrt{l_{r1}}}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n,1}}{(1+4\nu_n^{\,2})}\left(2\nu_n Cos\left(\nu_n\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)+Sin\left(\nu_n\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)\frac{\Phi_n^{\theta}(Cos(\theta))}{\Phi_n^{\theta}(\mu_1)}\qquad avec\quad \nu_n=\frac{n\pi}{\alpha}$$

.

Lorsque les deux fonctions limites sur les tranches de la section conique-sphérique creuse sont constantes, alors on a la nullité de tous les termes de valeur propres non nulle puisque :

$$f_1(\tau)=T_1\quad f_2(\tau)=T_2$$

$$S_{n,1}=T_1\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}}(2\nu_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau)+Sin(\nu_n\alpha\,\tau))\quad S_{n,2}=T_2\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}}(2\nu_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau)+Sin(\nu_n\alpha\,\tau))$$

$$Or\quad \int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}}(2\nu_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau)+Sin(\nu_n\alpha\,\tau))=\frac{2e^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha}Sin(\nu_n\alpha)=0$$

.

Dans ce cas la solution devient triviale est s'écrit :

$$T(r,\theta)=T_1\frac{\left(Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)-Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{\left(Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)-Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\right)}+T_2\frac{\left(Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)-Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{\left(Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)-Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)\right)}$$

.

L'obtention de cette solution triviale qui ne dépend plus de r n'est pas un hasard, puisque les conditions aux limites inhomogènes choisies sont constantes et les conditions homogène de Neumann implique aucun gradient dans la direction radiale. Tout cela ne peut que conduire à une solution ne dépendant plus de r. Une telle configuration est totalement équivalente à la formulation d'une équation de Laplace dans l'unique coordonnées angulaire ϑ.

Si l'on réintroduit un problème aux limites avec la coordonnée azimutale φ, c'est un moyen de simuler dans un domaine à trois dimensions, la répartition d'un solution ne dépendant que des angles ϑ et φ. C'est ce que nous allons aborder dans le point suivant :

Problème aux limites sur une section conique-sphérique creuse avec des conditions aux limites en dépendance azimutale

Rappelons la séparation de l'équation de Laplace en coordonnées sphérique r,ϑ,φ :
$T(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$
cas général

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)-\frac{\alpha_2}{r^2}R(r)=0 \\ \Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\left[\alpha_2-\frac{\alpha_3}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta)=0 \\ \Phi''(\varphi)+\alpha_3\Phi(\varphi)=0 \end{array} \right.$$

$si \quad \alpha_2=\lambda(\lambda+1)\ et\ \alpha_3=m^2 \quad avec \quad m \quad entier,$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}R(r)=0 \\ \Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\left[\lambda(\lambda+1)-\frac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta)=0 \\ \Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0 \Rightarrow \Phi(\varphi)=A\,Cos(m\varphi)+B\,Sin(m\varphi) \end{array} \right.$$

$valeur\ propre\ nulle \rightarrow si\ \alpha_2=0,\alpha_3=0$

$$\Rightarrow R(r)=A+B/r$$

$$\Theta(\theta)=C+D\ Log[\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}]$$

$$\Phi(\varphi)=E+F\ \varphi$$

Il s'agit de résoudre des problèmes aux limites dont les conditions aux limites sont homogènes radialement dans des configurations géométriques radialement creuses et dont les conditions aux limites inhomogènes présentent une dépendance azimutale d'angle φ :

$\Delta T(r,\theta,\varphi)=0 \quad T(r,\theta,\varphi)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$

$\alpha_1 T_r'(r,\theta,\varphi)-\beta_1 T(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=l_{r1}}=0 \quad conditions\ mixtes\ licites\ avec\ coefficients\ constants$

$\alpha_2 T_r'(r,\theta,\varphi)+\beta_2 T(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=l_{r2}}=0$

$T_z'(r,z,\varphi) \quad ou \quad T(r,z,\varphi)\Big|_{z=\mu_1}=f_{1r}(r,\varphi)$

$T_z'(r,z,\varphi) \quad ou \quad T(r,z,\varphi)\Big|_{z=\mu_2}=f_{2r}(r,\varphi)$

Fonctions propres radiales

Pour ce qui est des fonctions propres radiales, nous avons vu qu'elles avaient la forme suivante, sur laquelle on peut appliquer des conditions aux limites homogènes de Robin.

$$\alpha\,\tau = Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right) \quad \alpha = Log\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right) \quad \nu = \frac{\sqrt{4\mu-1}}{2} \quad \mu = -\lambda(\lambda+1) \quad r = l_{r1}e^{\alpha\tau} \quad e^{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{l_{r2}}{l_{r1}}} \quad e^{-\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{l_{r1}}{l_{r2}}}$$

$$R(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(C\,Cos(\nu\,t) + D\,Sin(\nu\,t)\right) \Rightarrow$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}\left(A\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) + B\,Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right) \quad R_r^{'}(r) = \frac{R'(t)}{r} = \frac{R'(\tau)}{\alpha\,r}$$

$$R_\tau^{'}(\tau) = \frac{\alpha}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}\left(Cos(\nu\,\alpha\,\tau)\left(B\nu - \frac{A}{2}\right) - Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\left(A\nu + \frac{B}{2}\right)\right)$$

$$\alpha_1\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial r} - \beta_1 T(r,\theta,\varphi)\bigg|_{r=l_{r1}} \Rightarrow \alpha_1\frac{R_\tau^{'}(0)}{\alpha\,l_{r1}} - \beta_1 R(0) = 0$$

$$\alpha_2\frac{\partial T(r,\theta,\varphi)}{\partial r} + \beta_2 T(r,\theta,\varphi)\bigg|_{r=l_{r2}} \Rightarrow \alpha_2\frac{R_\tau^{'}(1)}{\alpha\,l_{r2}} + \beta_2 R(1) = 0$$

$$R(0) = \frac{1}{\sqrt{l_{r1}}}A \quad R(1) = \frac{1}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha}{2}}\left(A\,Cos(\nu\,\alpha) + B\,Sin(\nu\,\alpha)\right)$$

$$\frac{R_\tau^{'}(0)}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{l_{r1}}}\left(B\nu - \frac{A}{2}\right) \quad \frac{R_\tau^{'}(1)}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha}{2}}\left(Cos(\nu\,\alpha)\left(B\nu - \frac{A}{2}\right) - Sin(\nu\,\alpha)\left(A\nu + \frac{B}{2}\right)\right)$$

$$\alpha_1\frac{R_\tau^{'}(0)}{\alpha l_{r1}} - \beta_1 R(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\frac{R_\tau^{'}(0)}{\alpha} - \beta_1 l_{r1}R(0) = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha_1\nu\,B = \left(2l_{r1}\beta_1 + \alpha_1\right)A \Rightarrow B = \left(2l_{r1}\beta_1 + \alpha_1\right) \quad et \quad A = 2\alpha_1\nu \Rightarrow \left(B\nu - \frac{A}{2}\right) = 2l_{r1}\beta_1\nu$$

$$\Rightarrow R(\tau) = \frac{1}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}\left(2\alpha_1\nu\,Cos(\nu\,\alpha\,\tau) + \left(2l_{r1}\beta_1 + \alpha_1\right)Sin(\nu\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$\alpha_2\frac{R_\tau^{'}(1)}{\alpha\,l_{r2}} + \beta_2 R(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_2\frac{R_\tau^{'}(1)}{\alpha} + \beta_2 l_{r2}R(1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_2\left(Cos(\nu\,\alpha)4l_{r1}\beta_1\nu - Sin(\nu\,\alpha)\left(4\alpha_1\nu^2 + 2l_{r1}\beta_1 + \alpha_1\right)\right) + l_{r2}\beta_2\left(4\alpha_1\nu\,Cos(\nu\,\alpha) + 2\left(2l_{r1}\beta_1 + \alpha_1\right)Sin(\nu\,\alpha)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\nu\,Cos(\nu\,\alpha)\left(l_{r1}\alpha_2\beta_1 + l_{r2}\alpha_1\beta_2\right) = Sin(\nu\,\alpha)\left(4\alpha_1\alpha_2\nu^2 - 4l_{r1}l_{r2}\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 + 2l_{r1}\alpha_2\beta_1 - 2l_{r2}\alpha_1\beta_2\right)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \beta_1 = \beta_2 = 1 \rightarrow Sin(\nu\,\alpha) = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \quad \beta_1 = \beta_2 = 0 \rightarrow Sin(\nu\,\alpha) = 0$$

$$\alpha_1 = \beta_2 = 0 \quad \beta_1 = \alpha_2 = 1 \rightarrow 2\nu\,Cos(\nu\,\alpha) = Sin(\nu\,\alpha)$$

$$\beta_1 = \alpha_2 = 0 \quad \alpha_1 = \beta_2 = 1 \rightarrow 2\nu\,Cos(\nu\,\alpha) = -Sin(\nu\,\alpha)$$

D'où le résultat des fonctions propres radiales :

$$R(\tau)=\frac{1}{\sqrt{l_{r1}}}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}\left(2\alpha_1\nu_n\,Cos(\nu_n\,\alpha\,\tau)+\left(2l_{r1}\beta_1+\alpha_1\right)Sin(\nu_n\,\alpha\,\tau)\right)$$

$$R(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(2\alpha_1\nu_n\,Cos\left(\nu_n\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)+\left(2l_{r1}\beta_1+\alpha_1\right)Sin\left(\nu_n\,Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right)$$

$$\nu_n\quad tq\quad 4\nu_n\,Cos(\nu_n\,\alpha)\left(l_{r1}\alpha_2\beta_1+l_{r2}\alpha_1\beta_2\right)=Sin(\nu_n\,\alpha)\left(4\alpha_1\alpha_2\nu_n^{\ 2}-4l_{r1}l_{r2}\beta_1\beta_2+\alpha_1\alpha_2+2l_{r1}\alpha_2\beta_1-2l_{r2}\alpha_1\beta_2\right)$$

.

Les fonctions angulaires azimutales:

L'équation séparée peut revêtir deux formes : $\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$ ou $\Phi''(\varphi)-m^2\Phi(\varphi)=0$
Compte tenu de la périodicité 2π exigé par la solution lorsque la configuration géométrique du domaine présente une révolution complète en angle φ, alors et seulement dans ce cas la première forme de l'équation est retenue et le paramètre m est entier. En conséquence les fonctions ont une forme très simple, $\Phi(\varphi)=A\,Cos(m\varphi)+B\,Sin(m\varphi)$, et l'on peut classer les fonctions propres par classe de symétrie par rapport aux conditions aux limites du problème aux limites:

Propriétés de symétrie des conditions aux limites	Symbole de symétrie	Fonctions propres utilisées dans le cas d'un disque complet en angle creux ou plein
$f_\varphi(\varphi)=f_\varphi(\pi-\varphi)\quad et\quad f_\varphi(\varphi)=f_\varphi(-\varphi)$	Y+,X+	$Cos(2m\varphi)$
$f_\varphi(\varphi)=f_\varphi(\pi-\varphi)\quad et\quad f_\varphi(\varphi)=-f_\varphi(-\varphi)$	Y+,X-	$Sin((2m+1)\varphi)$
$f_\varphi(\varphi)=-f_\varphi(\pi-\varphi)\quad et\quad f_\varphi(\varphi)=f_\varphi(-\varphi)$	Y-,X+	$Cos((2m+1)\varphi)$
$f_\varphi(\varphi)=-f_\varphi(\pi-\varphi)\quad et\quad f_\varphi(\varphi)=-f_\varphi(-\varphi)$	Y-,X-	$Sin(2m\varphi)$

Les fonctions angulaires en ϑ:

Les fonctions angulaires associées sont solutions de l'équation différentielle avec un paramètre m entier:

$$Si\; 1-4\mu<0 \quad \lambda(\lambda+1)=-\mu$$

$$\rightarrow \lambda=\frac{-1\pm i\sqrt{4\mu-1}}{2} \rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}+i\nu \quad En\; posant\; \nu=\frac{\sqrt{4\mu-1}}{2} \quad m\in \mathrm{N}$$

$$\Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\left[\lambda(\lambda+1)-\frac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta)=0$$

$$\Rightarrow \Theta_\nu(\theta)=A\,P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(Cos(\theta)\right)+B\,P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(-Cos(\theta)\right)$$

$$ou\; bien \quad \Theta_\nu(\theta)=A\,P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(Cos(\theta)\right)+B\,P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(-Cos(\theta)\right)$$

$$ou\; bien \quad \Theta_\nu(\theta)=A\,P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(Cos(\theta)\right)+B\,\hat{Q}^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(Cos(\theta)\right)$$

$$ou\; bien \quad \Theta_\nu(\theta)=A\,P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(Cos(\theta)\right)+B\,\hat{Q}^{m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(Cos(\theta)\right)$$

$$P^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\; Fonctions\; associées\; de\; Legendre\; de\; degré\; -\frac{1}{2}+i\nu \quad et\; d'ordre\; \pm m$$

$$\hat{Q}^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)\; Deuxième\; solution\; linéairement\; indépendante$$

Aussi appelées fonctions coniques ou fonctions de Mehler

Sans oublier la solution de valeur propre nulle des équations séparées:

$$\Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)-\frac{m^2}{Sin^2(\theta)}\Theta(\theta)=0$$

$$\Rightarrow \Theta_0(\theta)=A\,Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)+B\,Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)$$

$$Si \quad m=0 \Rightarrow \Theta_0(\theta)=A+B\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)$$

.

Choisissons pour la suite de prendre pour fonctions coniques celles des ordres négatifs -m.

On démontre que la valeur de la fonction associée de Legendre est bien réelle à l'aide de la propriétés de miroir suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} P_{\bar{\tau}}^{\bar{\mu}}(\bar{z}) = \overline{P_{\tau}^{\mu}(z)} \\ P_{-\tau}^{\mu}(z) = P_{\tau-1}^{\mu}(z) \end{array}\right\} \Rightarrow \tau = -\frac{1}{2} + i\nu \rightarrow \bar{\tau} = -\frac{1}{2} - i\nu = -(\tau+1)$$

$$\Rightarrow \overline{P_{\tau}^{-m}(x)} = P_{\bar{\tau}}^{-m}(x) = P_{-(\tau+1)}^{-m}(z) = P_{\tau}^{-m}(z) \quad c.q.f.d$$

.

Dans la construction de la seconde solution, la fonction $P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-x)$ *est linéairement indépendante de* $P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(x)$ *et également de valeur réelle.*

On rappelle que les fonctions associées de Legendre de première sont reliées par les formules de liaisons

$$P_{\tau}^{-m}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma(\tau - m + 1)}{\Gamma(\tau + m + 1)} P_{\tau}^{m}(z)$$

$$\tau = -\frac{1}{2} + i\nu \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu - m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu + m\right)} P_{\tau}^{m}(z)$$

De même entre les fonctions associées de première et deuxième espèce :

$$P_{\tau}^{\mu}(z) = -\frac{2}{\pi\, Sin((\tau+\mu)\pi)}\left(Cos((\tau+\mu)\pi) Q_{\tau}^{\mu}(z) + Q_{\tau}^{\mu}(-z)\right)$$

$$Q_{\tau}^{\mu}(z) = \frac{\pi}{2Sin((\tau+\mu)\pi)}\left(Cos((\tau+\mu)\pi) P_{\tau}^{\mu}(z) - P_{\tau}^{\mu}(-z)\right)$$

$$\Rightarrow P_{\tau}^{-\mu}(z) = -\frac{2}{\pi\, Sin((\tau-\mu)\pi)}\left(Cos((\tau-\mu)\pi) Q_{\tau}^{-\mu}(z) + Q_{\tau}^{-\mu}(-z)\right)$$

$$Q_{\tau}^{-\mu}(z) = \frac{\pi}{2Sin((\tau-\mu)\pi)}\left(Cos((\tau-\mu)\pi) P_{\tau}^{-\mu}(z) - P_{\tau}^{-\mu}(-z)\right)$$

Lorsque τ=-1.2+i ν, et avec m entier il vient :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = -\frac{2}{\pi\, Sin\left(\left(-\frac{1}{2} + i\nu - m\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2} + i\nu - m\right)\pi\right) Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) + Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z)\right)$$

$$= -\frac{2(-1)^m}{\pi\, Sin\left(\left(-\frac{1}{2} + i\nu\right)\pi\right)}\left((-1)^m Cos\left(\left(-\frac{1}{2} + i\nu\right)\pi\right) Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) + Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z)\right)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = \frac{\pi(-1)^m}{2Sin\left(\left(-\frac{1}{2} + i\nu\right)\pi\right)}\left((-1)^m Cos\left(\left(-\frac{1}{2} + i\nu\right)\pi\right) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) - P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z)\right)$$

$$Cos\left(\left(-\frac{1}{2} + i\nu\right)\pi\right) = i\, Sinh(\nu\pi) \quad Sin\left(\left(-\frac{1}{2} + i\nu\right)\pi\right) = -Cosh(\nu\pi)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = -\frac{\pi(-1)^m}{-2Cosh(\nu\pi)}\left(i\, Sinh(\nu\pi)(-1)^m P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) - P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z) = \frac{\pi(-1)^m}{2\, Cosh(\nu\pi)}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(-z) - i\,(-1)^m Sinh(\nu\pi) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-m}(z)\right)$$

.

La fonction associée de Legendre de première espèce, à valeur réelle et on l'appelle communément également la fonction conique associée de première espèce ou fonction associée de Mehler. On voit que le calcul de la fonction associée de Legendre de deuxième espèce donne un résultat imaginaire. Il faut alors choisir une valeur réelle pour une fonction de deuxième espèce. Certains ont choisit cette dernière fonction, en prenant comme valeur à définir sa partie réelle, comme fonction conique de deuxième espèce :

$$\hat{Q}^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) = Re\left((-1)^m Q^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) \right) = \frac{\pi}{2\,Cosh(\nu\pi)} P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-z)$$

En effet, on ne peut prendre la partie imaginaire $\mathrm{Im}\left(Q^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z) \right) = -\frac{\pi\,Sinh(\nu\pi)}{2\,Cosh(\nu\pi)} P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(z)$ *car cette dernière n'est pas linéairement indépendante de la fonction conique de première espèce. Au passage il est évident que la partie réelle d'une fonction à valeur imaginaire, tout comme sa partie imaginaire respecte également l'équation différentielle à partir du moment où tous les autres éléments de l'équation différentielle sont à valeur purement réelle. L'association entre fonctions radiales et angulaires est donc la suivante :*

ν_n *valeurs définies par les conditions aux limites homogènes radiales*

$$\Phi^r_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(A^r_n\,Cos\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + B^r_n\,Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi^\theta_{n,m}(\theta) = A^\theta_n P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta)) + B^\theta_n \hat{Q}^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta)) \\ \Phi^\varphi_m(\varphi) = A^\varphi_m Cos(m\varphi) + B^\varphi_m Sin(m\varphi) \end{pmatrix}$$

Toute solution du problème aux limites présente le développement en série suivant :

$$T(r,\theta) = \left(A^r_0 + \frac{B^r_0}{r} \right) \begin{pmatrix} \left(A^\theta_0 + B^\theta_0 Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right) + \\ + \sum_{m=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} \left(A^\theta_m Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right) + B^\theta_m Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)\right) \times \\ \left(A^\varphi_m Cos(m\varphi) + B^\varphi_m Sin(m\varphi) \right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}}\left(A^r_n\,Cos\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right) + B^r_n\,Sin\left(\nu_n Log\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)\right)\right) \times \\ \times \left(A^\theta_n P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta)) + B^\theta_n \hat{Q}^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\nu_n}(Cos(\theta)) \right) \times \\ \left(A^\varphi_n Cos(m\varphi) + B^\varphi_n Sin(m\varphi) \right) \end{pmatrix}$$

.

Exemple: *nous allons prendre volontairement des conditions aux limites radiales homogènes de Neumann, afin d'illustrer le passage à une configuration de coque sphérique :*

$$\Delta T(r,\theta,\varphi)=0 \quad T(r,\theta,\varphi)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$

$$T_r^{'}(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T_r^{'}(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=l_{r2}}=0$$

$$T(r,z,\varphi)\Big|_{z=\mu_1}=T_{1r}f_{1r}(\varphi) \quad T(r,z,\varphi)\Big|_{z=\mu_2}=T_{2r}f_{2r}(\varphi)$$

.

Le calcul des coefficients radiales met en oeuvre une double intégration sur la variable radiale et la variable azimutale. Si les conditions aux limites ne présente aucune dépendance radiale, il est clair que lors du calcul l'intégrale :

$$\int_0^1 d\tau\, e^{\frac{\alpha\tau}{2}}\left(2\nu_n Cos(\nu_n\alpha\,\tau)+Sin(\nu_n\alpha\,\tau)\right)=\frac{2e^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha}Sin(\nu_n\alpha)=0$$

Tous les coefficients à indice n non nul s'annule. La partie radiale en valeur propre nulle, compte tenu des deux conditions aux limites homogènes est une constante. Cela confirme donc que la solution ne dépend pas de r. Il ne reste du développement que les termes uniquement angulaires :

$$T(r,\theta)=A_0^\theta+B_0^\theta Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)+\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\begin{array}{l}\left(A_m^\theta Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)+B_m^\theta Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)\right)\times\\ \left(A_m^\varphi Cos(m\varphi)+B_m^\varphi Sin(m\varphi)\right)\end{array}\right)$$

Autrement dit il s'agit également de la résolution d'un problème sur une coque sphérique de la forme :

$$\frac{\partial^2 T(\theta,\varphi)}{\partial\theta^2}+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\frac{\partial T(\theta,\varphi)}{\partial\theta}+\frac{1}{Sin(\theta)}\frac{\partial^2 T(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \quad T(\theta,\varphi)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)$$

$$T(z,\varphi)\Big|_{z=\mu_1}=T_1f_1(\varphi) \quad T(z,\varphi)\Big|_{z=\mu_2}=T_2f_2(\varphi)$$

Problème que l'on résout comme d'habitude en deux sous-problèmes :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 T(\theta,\varphi)}{\partial\theta^2}+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\frac{\partial T(\theta,\varphi)}{\partial\theta}+\frac{1}{Sin(\theta)}\frac{\partial^2 T(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0\\ T(\theta,\varphi)\ fini \quad z=Cos(\theta)\\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)\\ T(z,\varphi)\Big|_{z=\mu_1}=0 \quad T(z,\varphi)\Big|_{z=\mu_2}=T_2f_2(\varphi)\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 T(\theta,\varphi)}{\partial\theta^2}+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\frac{\partial T(\theta,\varphi)}{\partial\theta}+\frac{1}{Sin(\theta)}\frac{\partial^2 T(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0\\ T(\theta,\varphi)\ fini \quad z=Cos(\theta)\\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)\\ T(z,\varphi)\Big|_{z=\mu_1}=T_1f_1(\varphi) \quad T(z,\varphi)\Big|_{z=\mu_2}=0\end{array}\right.$$

La forme des fonctions angulaires en ϑ est la suivante :

$$\Theta_0^2(\mu_1)=0\Rightarrow\Theta_0^2(\theta)=1-\frac{Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)} \quad \Theta_0^1(\mu_2)=0\Rightarrow\Theta_0^1(\theta)=1-\frac{Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}$$

$$\Theta_m^2(\mu_1)=0\Rightarrow\Theta_m^2(\theta)=\frac{Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\right)}-\frac{Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\right)}$$

$$\Theta_m^1(\mu_2)=0\Rightarrow\Theta_m^1(\theta)=\frac{Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)\right)}-\frac{Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)\right)}$$

Avec les conditions aux limites angulaires et en les décomposant par symétrie :

$$f_2(\varphi)=f_{2,Y+,X+}(\varphi)+f_{2,Y+,X-}(\varphi)+f_{2,Y-,X+}(\varphi)+f_{2,Y-,X-}(\varphi),\quad sachant\ que\quad f_2(\varphi)=f_2(2\pi+\varphi)$$

$$f_{2,Y+,X+}(\varphi)=\frac{f_2(\varphi)+f_2(\pi-\varphi)+f_2(-\varphi)+f_2(\varphi-\pi)}{4}\quad f_{2,Y+,X-}(\varphi)=\frac{f_2(\varphi)+f_2(\pi-\varphi)-f_2(-\varphi)-f_2(\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{2,Y-,X+}(\varphi)=\frac{f_2(\varphi)-f_{2r}(\pi-\varphi)+f_2(-\varphi)-f_2(\varphi-\pi)}{4}\quad f_{2,Y-,X-}(\varphi)=\frac{f_2(\varphi)-f_2(\pi-\varphi)-f_2(-\varphi)+f_2(\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_1(\varphi)=f_{1,Y+,X+}(\varphi)+f_{1,Y+,X-}(\varphi)+f_{1,Y-,X+}(\varphi)+f_{1,Y-,X-}(\varphi),\quad sachant\ que\quad f_1(\varphi)=f_1(2\pi+\varphi)$$

$$f_{1,Y+,X+}(\varphi)=\frac{f_1(\varphi)+f_1(\pi-\varphi)+f_1(-\varphi)+f_1(\varphi-\pi)}{4}\quad f_{1,Y+,X-}(\varphi)=\frac{f_1(\varphi)+f_1(\pi-\varphi)-f_1(-\varphi)-f_1(\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{1,Y-,X+}(\varphi)=\frac{f_1(\varphi)-f_1(\pi-\varphi)+f_1(-\varphi)-f_1(\varphi-\pi)}{4}\quad f_{1,Y-,X-}(\varphi)=\frac{f_1(\varphi)-f_1(\pi-\varphi)-f_1(-\varphi)+f_1(\varphi-\pi)}{4}$$

Et les fonctions angulaires :

$$\Theta_0^2(\theta)=1-\frac{Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)}\quad \Theta_0^1(\theta)=1-\frac{Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}\quad \Theta_0^2(\mu_2)=\frac{Log\left(\frac{(1+\mu_2)(1-\mu_1)}{(1-\mu_2)(1+\mu_1)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)}$$

$$\Theta_0^1(\mu_1)=\frac{Log\left(\frac{(1+\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1+\mu_2)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}\quad \Theta_m^2(\theta)=\frac{Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\right)}-\frac{Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\right)}$$

$$\Theta_m^2(\mu_2)=2\frac{Sinh\left(m\,Log\left(\frac{(1-\mu_1)(1+\mu_2)}{(1+\mu_1)(1-\mu_2)}\right)\right)}{Sinh\left(2m\,Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\right)}\quad \Theta_m^1(\theta)=\frac{Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{Cosh\left(m\,Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)\right)}-\frac{Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{Sinh\left(m\,Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)\right)}$$

$$\Theta_m^1(\mu_1)=2\frac{Sinh\left(m\,Log\left(\frac{(1+\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1+\mu_2)}\right)\right)}{Sinh\left(2m\,Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)\right)}$$

.

On peut présenter le résultat comme la somme de 8 séries, sans omettre la solution de valeur propre nulle :

$$A^2_{0,Y+,X+} = \int_0^\pi d\varphi\ f_{2,Y+,X+}(\varphi) \quad A^2_{2m,Y+,X+} = \int_0^\pi d\varphi\ f_{2,Y+,X+}(\varphi) Cos(2m\varphi) \quad A^2_{2m,Y-,X-} = \int_0^\pi d\varphi\ f_{2,Y-,X-}(\varphi) Sin(2m\varphi)$$

$$A^2_{2m+1,Y+,X-} = \int_0^\pi dz\ f_{2,Y+,X-}(\varphi) Sin((2m+1)\varphi) \quad A^2_{2m+1,Y-,X+} = \int_0^\pi d\varphi\ f_{2,Y-,X+}(\varphi) Cos((2m+1)\varphi)$$

$$A^1_{0,Y+,X+} = \int_0^\pi d\varphi\ f_{1,Y+,X+}(\varphi) \quad A^1_{2m,Y+,X+} = \int_0^\pi d\varphi\ f_{1,Y+,X+}(\varphi) Cos(2m\varphi) \quad A^1_{2m,Y-,X-} = \int_0^\pi d\varphi\ f_{1,Y-,X-}(\varphi) Sin(2m\varphi)$$

$$A^1_{2m+1,Y+,X-} = \int_0^\pi dz\ f_{1,Y+,X-}(\varphi) Sin((2m+1)\varphi) \quad A^1_{2m+1,Y-,X+} = \int_0^\pi d\varphi\ f_{1,Y-,X+}(\varphi) Cos((2m+1)\varphi)$$

$$T(r,\theta) = \frac{2}{\pi} T_2 \left(\begin{array}{l} \left(1 - \dfrac{Log\left(\dfrac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\dfrac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)}\right) \dfrac{Log\left(\dfrac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)}{Log\left(\dfrac{(1+\mu_2)(1-\mu_1)}{(1-\mu_2)(1+\mu_1)}\right)} \dfrac{A^2_{0,Y+,X+}}{2} + \\ + \sum_{m=1}^{+\infty} A^2_{2m,Y+,X+} \dfrac{\Theta^2_{2m}(\theta)}{\Theta^2_{2m}(\mu_2)} Cos(2m\varphi) + \sum_{m=0}^{+\infty} A^2_{2m+1,Y+,X-} \dfrac{\Theta^2_{2m+1}(\theta)}{\Theta^2_{2m+1}(\mu_2)} Sin((2m+1)\varphi) + \\ + \sum_{m=0}^{+\infty} A^2_{2m+1,Y-,X+} \dfrac{\Theta^2_{2m+1}(\theta)}{\Theta^2_{2m+1}(\mu_2)} Cos((2m+1)\varphi) + \sum_{m=1}^{+\infty} A^2_{m,Y-,X-} \dfrac{\Theta^2_{2m}(\theta)}{\Theta^2_{2m}(\mu_2)} Sin(2m\varphi) \end{array} \right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} T_1 \left(\begin{array}{l} \left(1 - \dfrac{Log\left(\dfrac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\dfrac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}\right) \dfrac{Log\left(\dfrac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}{Log\left(\dfrac{(1+\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1+\mu_2)}\right)} \dfrac{A^1_{0,Y+,X+}}{2} + \\ + \sum_{m=1}^{+\infty} A^1_{2m,Y+,X+} \dfrac{\Theta^1_{2m}(\theta)}{\Theta^1_{2m}(\mu_1)} Cos(2m\varphi) + \sum_{m=0}^{+\infty} A^1_{2m+1,Y+,X-} \dfrac{\Theta^1_{2m+1}(\theta)}{\Theta^1_{2m+1}(\mu_1)} Sin((2m+1)\varphi) + \\ + \sum_{m=0}^{+\infty} A^1_{2m+1,Y-,X+} \dfrac{\Theta^1_{2m+1}(\theta)}{\Theta^1_{2m+1}(\mu_1)} Cos((2m+1)\varphi) + \sum_{m=1}^{+\infty} A^1_{2m,Y-,X-} \dfrac{\Theta^1_{2m}(\theta)}{\Theta^1_{2m}(\mu_1)} Sin(2m\varphi) \end{array} \right)$$

Lorsque les fonctions limites sont constantes, seuls les composants Y+X+ sont retenues et la solution devient triviale avec le seul terme de valeur propre nulle :

$$f_2(\varphi)=1 \Rightarrow A^2_{0,Y+,X+}=\pi \quad f_1(\varphi)=1 \Rightarrow A^1_{0,Y+,X+}=\pi$$

$$T(r,\theta)=T_2\left(1-\frac{Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)}\right)\frac{Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)}{Log\left(\frac{(1+\mu_2)(1-\mu_1)}{(1-\mu_2)(1+\mu_1)}\right)}+T_1\left(1-\frac{Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}\right)\frac{Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}{Log\left(\frac{(1+\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1+\mu_2)}\right)}$$

$$T(r,\theta)=\frac{(T_1-T_2)Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)+T_2Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)-T_1Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}{\left(Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)-Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)\right)}$$

C 'est la solution de répartition de la température sur une coque sphérique d'angle d'ouverture ϑ1 et ϑ2, où sur ϑ1 la température est à T2 (µ2=Cos(ϑ1)) et sur ϑ2, la température est à T1 (µ1=Cos(ϑ2)).

Prenons une condition limite azimutale de symétrie Y+,X+ sur la frontière ϑ1 et une condition limite azimutale de symétrie Y+,X- sur la frontière ϑ2 de la forme :

$$f_1(\varphi)=1 \Rightarrow A^1_{0,Y+,X+}=\pi$$

$$f_2(\varphi)=\begin{cases}1 & 0\le\varphi\le\pi\\ -1 & 0\le\varphi\le\pi\end{cases} \Rightarrow f_2(\varphi)\ symétrie\ Y+,X-$$

Il vient :

$$A^1_{0,Y+,X+}=\int_0^\pi d\varphi=\pi \quad A^1_{2m,Y+,X+}=0 \quad m>0 \quad A^2_{2m+1,Y+,X-}=\int_0^\pi dz\ Sin((2m+1)\varphi)=\frac{2}{2m+1}$$

$$\Theta^2_{2m+1}(\theta)=\frac{Cosh\left((2m+1)Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{Cosh\left((2m+1)Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\right)}-\frac{Sinh\left((2m+1)Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)\right)}{Sinh\left((2m+1)Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\right)}$$

$$\Theta^2_{2m+1}(\mu_2)=2\frac{Sinh\left((2m+1)Log\left(\frac{(1-\mu_1)(1+\mu_2)}{(1+\mu_1)(1-\mu_2)}\right)\right)}{Sinh\left(2(2m+1)Log\left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\right)}$$

$$T(r,\theta)=\frac{4}{\pi}T_2\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\Theta^2_{2m+1}(\theta)}{\Theta^2_{2m+1}(\mu_2)}\frac{Sin((2m+1)\varphi)}{2m+1}+T_1\left(1-\frac{Log\left(\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}\right)}{Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}\right)\frac{Log\left(\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}\right)}{Log\left(\frac{(1+\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1+\mu_2)}\right)}.$$

Représentation intégrale de la solution du problème intérieur de Dirichlet inhomogène sur la surface d'une section conique-sphérique à trois dimensions

Bien que les fonctions radiales d'une section conique-sphérique ne soient pas apte à représenter une solution sous la forme de série sur un cône plein, du fait de sa rapide oscillation autour de l'origine. N Lebedev dans son ouvrage « SPECIAL FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS, Prentice Hall 1965 » les utilisent pour exprimer sous forme intégrale la solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad z=Cos(\theta)\, et\ \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$\Omega=\{(r,\theta)\in[0,+\infty]\times[0,\theta_0]\}$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f_r(r)$$

$$Condition$$

$$Lim_{r\to+\infty}T(r,\theta)=0$$

$$Lim_{r\to+\infty}f_r(r)=0$$

Comme nous l'avons vu les fonctions suivantes sont solutions de l'équation de Laplace :

$$\Phi_\tau^r(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_\tau^r\, Cos(\tau\ Log(r))+B_\tau^r\, Sin(\tau\ Log(r))\right)$$

$$\Phi_\tau^\theta(\theta)=A_\tau^\theta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))+B_\tau^\theta \hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))$$

La condition de finitude en ϑ=0, implique que cette solution se développe sous la forme :

$$T(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_\tau^r\, Cos(\tau\ Log(r))+B_\tau^r\, Sin(\tau\ Log(r))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))$$

Supposons maintenant, comme le fait N.Lebedev, que la fonction limite sur la surface du cône admette un développement en intégrale de Fourier généralisée, soit :

$$Posons\ \xi=Log(r)\Rightarrow d\xi=\frac{dr}{r}$$

$$\sqrt{r}\, f_r(r)=\int_0^{+\infty}d\tau\ \left(F_c(\tau)Cos(\tau\xi)+F_s(\tau)Sin(\tau\xi)\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$F_c(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ \sqrt{r}\, f_r(r)Cos(\tau\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\ \left(\frac{f_r(r)}{\sqrt{r}}Cos(\tau\ Log(r))\right)$$

$$F_s(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ \sqrt{r}\, f_r(r)Sin(\tau\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\ \left(\frac{f_r(r)}{\sqrt{r}}Sin(\tau\ Log(r))\right).$$

Le respect de la condition aux limites de Dirichlet conduit à la solution suivante :

$$T(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_\tau^r\ Cos(\tau\ Log(r))+B_\tau^r\ Sin(\tau\ Log(r))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))$$

Développement intégrale sur le paramètre τ

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\left(A_\tau^r\ Cos(\tau\ Log(r))+B_\tau^r\ Sin(\tau\ Log(r))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))$$

Comme $T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f_r(r)$

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\left(A_\tau^r\ Cos(\tau\ Log(r))+B_\tau^r\ Sin(\tau\ Log(r))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))=\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\ \left(F_c(\tau)Cos(\tau\xi)+F_s(\tau)Sin(\tau\xi)\right)$$

$$A_\tau^r=\frac{F_c(\tau)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}\qquad B_\tau^r=\frac{F_s(\tau)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$T(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\left(F_c(\tau)Cos(\tau\ Log(r))+F_s(\tau)Sin(\tau\ Log(r))\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

avec

$$F_c(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\left(\frac{f_r(r)}{\sqrt{r}}Cos(\tau\ Log(r))\right)$$

$$F_s(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\left(\frac{f_r(r)}{\sqrt{r}}Sin(\tau\ Log(r))\right)$$

Dans la littérature, il y a une condition pour que le développement de Fourier existe sur la fonction limite f(r) (voir E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals,* second edition, Oxford University Press, London (1950), Théoreme 3, p. 13)*:*

$f_r(r)$ *continue*

$f_r(r)$ *bornée sur tout interval* $[r1,r2]$

$$\int_0^{+\infty}dr\frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}}\quad est\ \ finie$$

.

L'exemple que donne Lebedev est un problème d'électrostatique : on doit trouver le potentiel électrostatique à l'intérieur d'un cône conducteur gardé au potentiel 0, si l'on place à une distance a de son sommet une charge q. La solution se développe comme suit par décomposition du potentiel en deux fonctions. Nous verrons par la suite que le problème à résoudre est en fait une équation de Poisson (celle dont le terme source représente la charge placée dans l'axe du cône), dont on connaît une solution particulière (le potentiel d'une charge libre dans tout l'espace) qui certes ne répond pas aux conditions aux limites imposées, mais qui ajoutée à la solution de l'équation de Laplace aux conditions aux limites de valeurs opposées sur la surface conique donne bien la solution du problème aux limites de Poisson. Pour cela il vient donc le problème aux limites de Laplace suivant :

$$T(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta)}}+U(r,\theta)\quad T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0\Rightarrow U(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=-\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)}}$$

$$U(r,\theta)\big|=\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\left(F_c(\tau)Cos(\tau\,Log(r))+F_s(\tau)Sin(\tau\,Log(r))\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$avec\quad F_c(\tau)=-\frac{q}{\pi}\int_0^{+\infty}dr\left(\frac{Cos(\tau\,Log(r))}{\sqrt{r}\sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)}}\right)=-\frac{q}{\pi\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}\frac{dr}{r}\left(\frac{Cos(\tau\,Log(r))}{\sqrt{\frac{r}{a}+\frac{a}{r}-2Cos(\theta_0)}}\right)$$

$$\xi=Log(r)\Rightarrow\xi-Log(a)=Log\left(\frac{r}{a}\right)\Rightarrow\frac{r}{a}=e^{\xi-Log(a)}\quad et\quad\frac{a}{r}=e^{-\xi+Log(a)}$$

$$\frac{r}{a}+\frac{a}{r}=e^{\xi-Log(a)}+e^{-\xi+Log(a)}=2\,Cosh(\xi-Log(a))\Rightarrow F_c(\tau)=-\frac{q}{\pi\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\,\frac{Cos(\tau\,\xi)}{\sqrt{2\,Cosh(\xi-Log(a))-2Cos(\theta_0)}}$$

$$s=\xi-Log(a)\Rightarrow F_c(\tau)=-\frac{q}{\pi\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,(s+Log(a)))}{\sqrt{2\,Cosh(s)-2Cos(\theta_0)}}$$

$$F_c(\tau)=-\frac{q}{\pi\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)Cos(\tau\,Log(a))-Sin(\tau\,s)Sin(\tau\,Log(a))}{\sqrt{2\,Cosh(s)-2Cos(\theta_0)}}$$

$$Or\quad\int_{-\infty}^{+\infty}ds\,\frac{Sin(\tau\,s)}{\sqrt{2\,Cosh(s)-2Cos(\theta_0)}}=0\Leftarrow Sin(\tau\,s)\quad impair\quad et\quad\int_{-\infty}^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)}{\sqrt{2\,Cosh(s)-2Cos(\theta_0)}}=2\int_0^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)}{\sqrt{2\,Cosh(s)-2Cos(\theta_0)}}$$

$$\Rightarrow F_c(\tau)=-\frac{2qCos(\tau\,Log(a))}{\pi\sqrt{2}\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)}{\sqrt{Cosh(s)-Cos(\theta_0)}}=-\frac{\sqrt{2}qCos(\tau\,Log(a))}{\pi\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)}{\sqrt{Cosh(s)-Cos(\theta_0)}}$$

$$Or\quad\int_0^{+\infty}ds\,\frac{Cos(\tau\,s)}{\sqrt{Cosh(s)-Cos(\theta_0)}}=\frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)\sqrt{2}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))$$

$$\Rightarrow F_c(\tau)=-\frac{\sqrt{2}qCos(\tau\,Log(a))}{\pi\sqrt{a}}\frac{\pi}{\sqrt{2}Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))=-\frac{qCos(\tau\,Log(a))}{\sqrt{a}Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))$$

.

De même :

$$F_s(\tau) = -\frac{q}{\pi}\int_0^{+\infty} dr \left(\frac{Sin(\tau\, Log(r))}{\sqrt{r}\sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)}} \right) \Rightarrow F_s(\tau) = -\frac{q}{\pi\sqrt{2}\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \frac{Sin(\tau\,(s+Log(a)))}{\sqrt{Cosh(s)-Cos(\theta_0)}}$$

$$\Rightarrow F_s(\tau) = -\frac{qSin(\tau\, Log(a))}{\sqrt{a}Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))$$

.

La solution du problème est alors donnée par l'intégrale :

$$U(r,\theta) = -\frac{q}{\sqrt{a}\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0)) \begin{pmatrix} Cos(\tau\, Log(a))Cos(\tau\, Log(r)) + \\ + Sin(\tau\, Log(a))Sin(\tau\, Log(r)) \end{pmatrix} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$U(r,\theta) = -\frac{q}{\sqrt{a}\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)} Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$T(r,\theta) = \frac{q}{\sqrt{a}\sqrt{r}}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{a}+\frac{a}{r}-2Cos(\theta)}} - \int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)} Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))} \right)$$

$$\text{Intégrale majorée par } \int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0)) = \frac{1}{2Sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \quad \text{voir plus bas}$$

.

Intégrales et représentations intégrales des fonctions coniques de Mehler d'ordre 0

Les deux représentations intégrales des fonctions associées de Legendre de première espèce sont valables l'une pour pour x> 1 et l'autre pour x€[-1,+1] (voir « W.Magnus, F.Oberhettinger, R.P.Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics » page 185 pou x>1 et 188 pour x€[-1,1]) :

$$P_\nu^{-\mu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^{+\infty} dt \frac{Cosh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right)}{(x+Cosh(t))^{\mu+\frac{1}{2}}} \quad \mu+\nu \neq -1,-2,\cdots \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(\nu-\mu) < 0 \\ \mathrm{Re}(\nu+\mu+1) > 0 \end{cases} \quad x\in[-1,1]$$

$$P_\nu^{-\mu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(x^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^{+\infty} dt \frac{Cosh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right)}{(x+Cosh(t))^{\mu+\frac{1}{2}}} \quad \mu+\nu \neq -1,-2,\cdots \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(\nu-\mu) < 0 \\ \mathrm{Re}(\nu+\mu+1) > 0 \end{cases} \quad x>1$$

$$\nu = -\frac{1}{2}+i\tau \quad \mu = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(-\nu) > 0 \Rightarrow P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)}\int_0^{+\infty} dt \frac{Cosh(i\tau\, t)}{(x+Cosh(t))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right) = \Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu) = -\frac{\pi}{Sin(\pi\nu)} = -\frac{\pi}{Sin\left(\pi\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\right)} = \frac{\pi}{Cos(\pi i\tau)} = \frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)}$$

$$\Rightarrow P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}Cosh(\pi\tau)\int_0^{+\infty} dt \frac{Cos(\tau\, t)}{(x+Cosh(t))^{\frac{1}{2}}} \quad \text{valable pour} \quad x\in[-1,1] \quad \text{et} \quad x>1$$

On en tire celles pour la fonction de Mehler d'ordre zéro dans les deux intervalles considérés.

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha))=\frac{2Cosh(\pi\tau)}{\pi}\int_0^{+\infty}d\theta\frac{Cos(\tau\theta)}{\sqrt{2Cosh(\alpha)+2Cosh(\theta)}}$$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha))=\frac{2Cosh(\pi\tau)}{\pi}\int_0^{+\infty}d\theta\frac{Cos(\tau\theta)}{\sqrt{2Cos(\alpha)+2Cosh(\theta)}}.$$

Appliquons ces deux représentations intégrales à des expressions déduites par l'application de la transformée de Fourier et de son inverse :

$$\frac{1}{\sqrt{2Cosh(\alpha)+2Cosh(x)}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\tau\ Cos(\tau x)\int_0^{+\infty}d\theta\frac{Cos(\tau\theta)}{\sqrt{2Cosh(\alpha)+2Cosh(\theta)}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2Cosh(\alpha)+2Cosh(x)}}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ Cos(\tau x)}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha))$$

$$x=i(\pi-\beta)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2Cosh(\alpha)-2Cos(\beta)}}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ Cosh(\tau(\pi-\beta))}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha))$$

$$x=i\beta\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2Cosh(\alpha)+2Cos(\beta)}}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ Cosh(\tau\beta)}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha))$$

$$\frac{1}{\sqrt{2Cos(\alpha)+2Cosh(x)}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\tau\ Cos(\tau x)\int_0^{+\infty}d\theta\frac{Cos(\tau\theta)}{\sqrt{2Cos(\alpha)+2Cosh(\theta)}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2Cos(\alpha)+2Cosh(x)}}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ Cos(\tau x)}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha))$$

$$x=i(\pi-\beta)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2Cos(\alpha)-2Cos(\beta)}}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ Cosh(\tau(\pi-\beta))}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha))$$

$$x=i\beta\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2Cos(\alpha)+2Cos(\beta)}}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ Cosh(\tau\beta)}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha))$$

En posant soit x=0, soit β=π,

$$\frac{1}{\sqrt{2Cos(\alpha)+2}}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha))$$

$$\frac{Cos(\alpha)+1}{2}=Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Rightarrow\frac{1}{2Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha))}{Cosh(\pi\tau)}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}{Cosh(\pi\tau)}=\frac{1}{2Cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

$$\alpha=(\pi-\theta_0)\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}{Cosh(\pi\tau)}=\frac{1}{2Cos\left(\frac{\pi-\theta_0}{2}\right)}=\frac{1}{2Sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}.$$

L'intégrale majorante se déduit de la formule précédente.

Il reste également à donner ces représentations intégrales :

$$P_\nu(Cosh(\alpha)) = \frac{2}{\pi} Cotan\left(\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{Sinh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{(2Cosh(\theta)-2Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}}} \quad pour \quad -1<\mathrm{Re}(\nu)<0$$

$$\Rightarrow \nu = -\frac{1}{2}+i\tau \Rightarrow \mathrm{Re}(\nu) = -\frac{1}{2} \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha)) = \frac{2}{\pi} Cotanh(\pi\tau)\int_\alpha^{+\infty} dt \frac{Sin(\tau\theta)}{(2Cosh(\theta)-2Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}}}$$

$$De\ même \quad P_\nu(Cos(\alpha)) = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha d\theta \frac{Cos\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{(2Cos(\theta)-2Cos(\alpha))^{\frac{1}{2}}} \quad \forall \nu$$

$$\Rightarrow \nu = -\frac{1}{2}+i\tau \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha)) = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha d\theta \frac{Cosh(\tau\theta)}{(2Cos(\theta)-2Cos(\alpha))^{\frac{1}{2}}} \quad \forall \nu$$

$$Egalement \quad Q_\nu(Cosh(\alpha)) = \int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta}}{(2Cosh(\theta)-2Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}}} \quad pour \quad -1<\mathrm{Re}(\nu)$$

$$\Rightarrow \nu = -\frac{1}{2}+i\tau \Rightarrow \mathrm{Re}(\nu) = -\frac{1}{2} \Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha)) = \int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{e^{-i\tau\theta}}{(2Cosh(\theta)-2Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}}}$$

<u>Autres représentations intégrales des fonctions coniques de Mehler d'ordre supérieur</u>

Toujours en utilisant les deux représentations intégrales des fonctions associées de Legendre de première espèce sont valables l'une pour pour x> 1 et l'autre pour x€[-1,+1], (voir « W.Magnus, F.Oberhettinger, R.P.Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics » page 185 pou x>1 et 188 pour x€[-1,1]) :

$$P_\nu^{-\mu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^{+\infty} dt \frac{Cosh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right)}{(x+Cosh(t))^{\mu+\frac{1}{2}}} \quad \mu+\nu \neq -1,-2,\cdots \quad \begin{cases}\mathrm{Re}(\nu-\mu)<0\\ \mathrm{Re}(\nu+\mu+1)>0\end{cases} \quad x\in[-1,1]$$

$$P_\nu^{-\mu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(x^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^{+\infty} dt \frac{Cosh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right)}{(x+Cosh(t))^{\mu+\frac{1}{2}}} \quad \mu+\nu \neq -1,-2,\cdots \quad \begin{cases}\mathrm{Re}(\nu-\mu)<0\\ \mathrm{Re}(\nu+\mu+1)>0\end{cases} \quad x>1$$

$$\nu = -\frac{1}{2}+i\tau \Rightarrow \mathrm{Re}(-\nu)>0 \Rightarrow$$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(x^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)}\int_0^{+\infty} dt \frac{Cos(\tau t)}{(x+Cosh(t))^{\mu+\frac{1}{2}}} \quad \mathrm{Re}(\mu)>-\frac{1}{2} \quad x>1$$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)}\int_0^{+\infty} dt \frac{Cos(\tau t)}{(x+Cosh(t))^{\mu+\frac{1}{2}}} \quad \mathrm{Re}(\mu)>-\frac{1}{2} \quad x\in[-1,1]$$

On en tire celles pour la fonction de Mehler d'ordre supérieur dans les deux intervalles considérés.

$$P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)Sinh^{\mu}(\alpha)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)}\int_0^{+\infty}d\theta\frac{Cos(\tau\theta)}{(Cosh(\alpha)+Cosh(\theta))^{\mu+\frac{1}{2}}}\quad \mathrm{Re}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)>0$$

$$P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)Sin^{\mu}(\alpha)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)}\int_0^{+\infty}d\theta\frac{Cos(\tau\theta)}{(Cos(\alpha)+Cosh(\theta))^{\mu+\frac{1}{2}}}\quad \mathrm{Re}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)>0\quad x\in[-1,1]$$

Appliquons ces deux représentations intégrales à des expressions déduites par l'application de la transformée de Fourier et de son inverse :

$$\frac{1}{(Cosh(\alpha)+Cosh(x))^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\tau\,Cos(\tau x)\int_0^{+\infty}d\theta\frac{Cos(\tau\theta)}{(Cosh(\alpha)+Cosh(\theta))^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(Cosh(\alpha)+Cosh(x))^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)Sinh^{\mu}(\alpha)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)Cos(\tau x)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha))$$

$$x=i(\pi-\beta)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(Cosh(\alpha)-Cos(\beta))^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)Sinh^{\mu}(\alpha)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)Cosh(\tau(\pi-\beta))P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha))$$

$$x=i\beta\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(Cosh(\alpha)+Cos(\beta))^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)Sinh^{\mu}(\alpha)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)Cosh(\tau\beta)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha))$$

$$\frac{1}{(Cos(\alpha)+Cosh(x))^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\tau\,Cos(\tau x)\int_0^{+\infty}d\theta\frac{Cos(\tau\theta)}{(Cos(\alpha)+Cosh(\theta))^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(Cos(\alpha)+Cosh(x))^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)Sin^{\mu}(\alpha)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)Cos(\tau x)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha))$$

$$x=i(\pi-\beta)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(Cos(\alpha)-Cos(\beta))^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)Sin^{\mu}(\alpha)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)Cosh(\tau(\pi-\beta))P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha))$$

$$x=i\beta\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(Cos(\alpha)+Cos(\beta))^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)Sin^{\mu}(\alpha)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)Cosh(\tau\beta)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\alpha))$$

On a également ces représentations intégrales dîtes formules de Mehler-Dirichlet (voir A.Erdelyi, H Bateman, Higher transcendantal functions, volume 1 » page 155 et 156, aussi « W.Magnus, F.Oberhettinger, R.P.Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics » page 186) :

$$P_\nu^{-\mu}(Cos(\alpha)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Sin^\mu(\alpha)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\alpha d\theta \frac{Cos\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{(Cos(\theta)-Cos(\alpha))^{\frac{1}{2}-\mu}} \quad \forall \nu \quad \mathrm{Re}(\mu) > -\frac{1}{2}$$

$$P_\nu^{-\mu}(Cosh(\alpha)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Sinh^\mu(\alpha)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\alpha d\theta \frac{Cosh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{(Cosh(\alpha)-Cosh(\theta))^{\frac{1}{2}-\mu}} \quad \forall \nu \quad \mathrm{Re}(\mu) > -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \nu = -\frac{1}{2}+i\tau \Rightarrow \begin{cases} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(Cos(\alpha)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Sin^\mu(\alpha)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\alpha d\theta \frac{Cosh(\tau\theta)}{(Cos(\theta)-Cos(\alpha))^{\frac{1}{2}-\mu}} & \mathrm{Re}(\mu) > -\frac{1}{2} \\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(Cosh(\alpha)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Sinh^\mu(\alpha)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\alpha d\theta \frac{Cos(\tau\theta)}{(Cosh(\alpha)-Cos(\theta))^{\frac{1}{2}-\mu}} & \mathrm{Re}(\mu) > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$De\ même\ P_\nu^{-\mu}(Cosh(\alpha)) = \sqrt{2\pi}\frac{Sinh^\mu(\alpha)}{Cos(\pi\nu)\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{Sinh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{(Cosh(\theta)-Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}+\mu}}$$

$$avec \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(\mu) > -\frac{1}{2} \\ \mathrm{Re}(\mu \pm \nu) < 0 \end{cases} \quad si \quad \nu = -\frac{1}{2}+i\tau$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(Cosh(\alpha)) = \frac{\sqrt{2\pi}\,Sinh^\mu(\alpha)}{Sinh(\pi\tau)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{Sin(\tau\theta)}{(Cosh(\theta)-Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}+\mu}}$$

$$pour\ -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(\mu) < \frac{1}{2} \quad Comme \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right) = \frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)}$$

$$Si \quad \mu = 0 \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{Sinh(\pi\tau)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)}\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{Sin(\tau\theta)}{(Cosh(\theta)-Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}Cosh(\pi\tau)}{\pi Sinh(\pi\tau)}\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{Sin(\tau\theta)}{(Cosh(\theta)-Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\pi}Cotanh(\pi\tau)\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{Sin(\tau\theta)}{(2Cosh(\theta)-2Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}}}$$

$$Egalement \quad Q_\nu^\mu(Cosh(\alpha)) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{i\mu\pi}\frac{Sinh^\mu(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta}}{(Cosh(\theta)-Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}+\mu}} \quad pour \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(\mu) < \frac{1}{2} \\ \mathrm{Re}(\nu+\mu+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nu = -\frac{1}{2}+i\tau \Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(Cosh(\alpha)) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{i\mu\pi}\frac{Sinh^\mu(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{e^{-i\tau\theta}}{(Cosh(\theta)-Cosh(\alpha))^{\frac{1}{2}+\mu}} \quad pour \quad -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(\mu) < \frac{1}{2}$$

Exemples divers de représentations intégrales

Revenons à notre exemple électrostatique en cours.

***Remarque sur le respect de la condition sur les fonctions limites** : on a vu qu'il peut exister un développement intégral de la solution du problème aux limites si la condition suivante, est respectée :*

$f_r(r)$ *continue*

$f_r(r)$ *bornée sur tout interval* $[r1, r2]$

$$\int_0^{+\infty} dr \frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}} \quad \text{est finie}$$

$$f_r(r) = -\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)}} \Rightarrow f_r(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)}}$$

Nous aurions pu par exemple vérifier que ces propriétés étaient bien respectées dans le problème électrostatique ou de source de chaleur ponctuelle. La fonction limite de la forme suivante respecte par évidence bien les deux premières conditions, il reste à démontrer la finitude de l'intégrale. Et le problème réside essentiellement sur les limites respectives de l'intégration. Il suffit de prouver la finitude de l'intégration d'un coté sur une borne suffisamment grande et de l'autre une borne suffisamment petite pour trouver des encadrements finis.

$$\int_0^{+\infty} dr \frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}} \Rightarrow \int_b^{+\infty} dr \frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}} \quad et \quad \int_0^{c} dr \frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}}$$

$$c \text{ suffisamment petit} \rightarrow c < a$$

$$b \text{ suffisament grand} \rightarrow b > a$$

Pour l'intégrale sur l'intervalle supérieur, il vient :

$$\int_b^{+\infty} dr \frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}} = \int_b^{+\infty} dr \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)}}$$

$$b > a \Rightarrow r - a > 0$$

$$\theta_0 \in [0, \pi] \rightarrow r - a \leq \sqrt{r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)} \leq r + a$$

$$\int_b^{+\infty} dr \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2a\,r\,Cos(\theta_0)}} \leq \int_b^{+\infty} dr \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{(r-a)} \leq \int_b^{+\infty} dr \frac{1}{(r-a)^{3/2}} = \int_{b'}^{+\infty} \frac{dr}{r^{3/2}} \quad fini$$

.

Pour l'intégrale inférieure, il vient :

$$\int_0^c dr \frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}} = \int_0^c dr \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)}}$$

$$c<a \Rightarrow r-a<0 \quad et \quad \theta_0 \in [0,\pi] \rightarrow a-r \leq \sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)} \leq a+r$$

$$\int_0^c dr \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{a+r} \leq \int_0^c dr \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta_0)}} \leq \int_0^c dr \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{a-r}$$

$$Posons \quad r = x^2 \rightarrow dr = 2xdx = 2\sqrt{r}dx \quad x' = x/\sqrt{a}$$

$$\int_0^c dr \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{a-r} = 2\int_0^{c'} \frac{dx}{(a-x^2)} = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{c''} \frac{dx'}{(1-x'^2)} = -\frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{c''} \frac{dx'}{(x'^2-1)}$$

$$Posons \quad x' = \frac{Cosh(u)}{Sinh(u)} \Rightarrow dx' = \left(\frac{Cosh^2(u)-Sinh^2(u)}{Sinh^2(u)}\right)du = x'^2-1$$

$$\int_0^{c''} \frac{dx'}{(x'^2-1)} = \int_0^{c'''} du \propto \left(Arcosh(c''')-Arcosh(0)\right) \Rightarrow \int_0^c dr \frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}} \quad fini$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} dr \frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}}$ *a donc une valeur finie.*

<u>Remarque sur le cas ϑ0=π/2</u> *: si l'angle d'ouverture du cône est droit, alors le cône forme un plan de séparation et le problème d'électrostatique est un problème bien connu de charges induites par une charge ponctuelle placée au dessus du plan, que l'on peut par exemple résoudre par la méthode des images électriques, et dont la solution est le potentiel d'un dipôle, dont la charge opposée est placée symétriquement au plan. Dans ce cas on sait donc que le potentiel a la valeur suivante :*

$$T(r,\theta) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta)}} - \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2a\,r\,Cos(\theta)}}.$$

Revenons à la solution intégrale et calculons sa valeur lorsque $\vartheta_0=\pi/2$*, il vient :*

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Cos(\theta_0) = 0 \quad \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(-Cos(\theta_0)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta_0)\right)} = 1$$

$$T(r,\theta) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,Cos(\theta)}} - \frac{q}{\sqrt{a}\sqrt{r}} \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)} Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{a}\right)\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right)$$

Il faut donc prouver que :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Cos(\theta_0) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{r}} \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{Cosh(\pi\tau)} Cos\left(\tau\, Log\left(\frac{r}{a}\right)\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right) = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+2a\,r\,Cos(\theta)}}.$$

D'après la formule, il vient avec le changement de variable ci-dessous :

$$\frac{1}{\sqrt{2Cosh(\alpha)+2Cosh(x)}}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ Cos(\tau\, x)}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha))$$

$$\alpha=i\,\vartheta\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2Cosh(x)+2Cos(\vartheta)}}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ Cos(\tau\, x)}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+2a\,r\,Cos(\theta)}}=\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{r}}\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{a}+\frac{a}{r}+2\,Cos(\theta)}}$$

$$Posons\quad x=Log\left(\frac{r}{a}\right)\Rightarrow\frac{r}{a}+\frac{a}{r}=2Cosh(x)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}+\frac{a}{r}\right)+2Cos(\vartheta)}}=\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{r}}\int_0^{+\infty}\frac{d\tau\ Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{a}\right)\right)}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))=\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{r}\sqrt{\left(\frac{r}{a}+\frac{a}{r}\right)+2Cos(\vartheta)}}=\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+2a\,r\,Cos(\theta)}}\qquad c.q.f.d$$

On retrouve un résultat identique à celui déduit de la méthode des images, c'est donc un bon indice que la formule de Lebedev est juste.

Prenons un autre exemple, où la fonction limite est produite cette fois-çi par le potentiel d'un fil de longueur infini uniformément chargé, placé le long de l'axe du cône. Le potentiel étant proportionnel à Log(d) où d est la distance d'un point du cône au fil, il vient une fonction limite de la forme :

$$f_r(r)=Log(rSin\theta)\Rightarrow f_r(r)=Log(r)+Log(Sin\theta)\Rightarrow Partie\quad f_r(r)=Log(r)$$

$$\int_0^{\infty}dr\frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}}=\int_0^{\infty}dr\frac{|Log(r)|}{\sqrt{r}}=\int_0^{1}dr\frac{|Log(r)|}{\sqrt{r}}+\underbrace{\int_1^{e^1}dr\frac{|Log(r)|}{\sqrt{r}}}_{fini}+\int_{e^1}^{+\infty}dr\frac{|Log(r)|}{\sqrt{r}}$$

$$\int_{e^1}^{+\infty}dr\frac{|Log(r)|}{\sqrt{r}}>\int_1^{+\infty}\frac{dr}{\sqrt{r}}\to\infty$$

$$Et\int_0^1 dr\frac{|Log(r)|}{\sqrt{r}}=-\frac{1}{2}\int_0^1 dr\,Log(r^2)=-\int_0^1 dr\,Log(r)=[r-rLog(r)]_0^1=1\ fini$$

Mais qui ne répond pas aux critères pour développer une solution intégrale.

Prenons un autre exemple, où la fonction limite est constante sur un support bornée et nulle ailleurs :

$$f_r(r) = T_0\begin{cases}1 & si \quad r\in[0,r_0]\\ 0 & si \quad r\in]a,+\infty)\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} dr\,\frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}} = T_0\int_0^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{r}} = 2T_0\sqrt{r_0} \quad finie$$

Plus généralement toute fonction limite à support bornée [0,a] et également bornée sur cette intervalle convient pour développer une solution intégrale, puisque.

$$|f_r(r)|\le C \Rightarrow \int_0^{\infty} dr\,\frac{|f_r(r)|}{\sqrt{r}} \le C\int_0^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{r}} = 2C\sqrt{r_0} \quad finie$$

.

Prenons maintenant des conditions aux limites de la forme :

$$f_r(r) = T_0\begin{cases}r^{\beta} & sur\ [0,r_0]\\ 0 & sur\ [r_0,+\infty]\end{cases} \qquad \beta\ge 0$$

La condition s'écrit :

$$T_0\int_0^{r_0} dr\ r^{\beta-1/2} = \frac{r_0^{\beta+1/2}}{\beta+1/2} \quad finie\ si\ \beta > -1/2$$

On peut donc calculer la représentation intégrale :

$$T(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{+\infty} d\tau\left(F^c(\tau)Cos(\tau\ Log(r)) + F^s(\tau)Sin(\tau\ Log(r))\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$avec \quad F^c(\tau) = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{r_0} dr\ r^{\beta-1/2}Cos(\tau\,Log(r)) \qquad F^c(\tau) = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{r_0} dr\ r^{\beta-1/2}Sin(\tau\,Log(r))$$

$$C = \int_0^{r_0} dr\ r^{\beta-1/2}Cos(\tau\ Log(r)) = \int_{-\infty}^{\xi_0} d\xi\ e^{(\beta+1/2)\xi}Cos(\tau\ \xi) = \frac{e^{(\beta+1/2)\xi_0}\left((\beta+1/2)\,Cos(\tau\ \xi_0) + \tau\ Sin(\tau\ \xi_0)\right)}{\left(\tau^2 + (\beta+1/2)^2\right)}$$

$$S = \int_0^{r_0} dr\ r^{\beta-1/2}Sin(\tau\ Log(r)) = \int_{-\infty}^{\xi_0} d\xi\ e^{(\beta+1/2)\xi}Sin(\tau\ \xi) = \frac{e^{(\beta+1/2)\xi_0}\left((\beta+1/2)\,Sin(\tau\ \xi_0) - \tau\ Cos(\tau\ \xi_0)\right)}{\left(\tau^2 + (\beta+1/2)^2\right)}$$

$$\left(F^c(\tau)Cos(\tau\ Log(r)) + F^s(\tau)Sin(\tau\ Log(r))\right) = \frac{T_0 r_0^{(\beta+1/2)}}{\pi}\frac{\left((\beta+1/2)\,Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) - \tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2 + (\beta+1/2)^2\right)}$$

Il vient la solution sous forme de la représentation intégrale suivante :

$$T(r,\theta) = \frac{T_0 r_0^{\beta}}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{\left((\beta+1/2)\,Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) - \tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2 + (\beta+1/2)^2\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

Lorsque β=0, soit des conditions aux limites constantes et à support borné, il vient :

$$T(r,\theta) = \frac{2T_0}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{\left(Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) - 2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2 + 1\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

.

Représentation intégrale pour le cas $\beta=0$ et $\vartheta_0=\pi/2$

$$\frac{T(r,\theta)}{T_0}=\frac{2r_0^{\beta}}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left((2\beta+1)\,Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2+(2\beta+1)^2\right)}\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}$$

$$\beta=0\rightarrow\frac{T(r,\theta)}{T_0}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2+1\right)}\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}$$

Sur l'axe z, soit $\vartheta=0$, il vient :

$$\theta=0\quad;\quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(1)=1\rightarrow\frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{2r_0^{\beta}}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left((2\beta+1)\,Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2+(2\beta+1)^2\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}$$

$$\beta=0\Rightarrow\frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2+1\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}$$

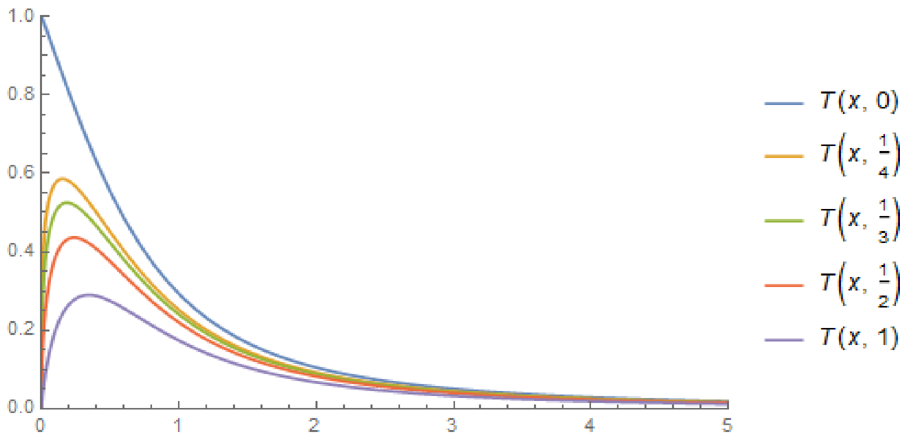
$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\qquad A=Re\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\right)\quad B=\mathrm{Im}\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)=A+iB\quad\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)=A-iB\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{A^2+B^2}$$

$$\Rightarrow\frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}r_0^{\beta}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left((2\beta+1)\,Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{\left(4\tau^2+(2\beta+1)^2\right)}$$

$$\beta=0\Rightarrow\frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{\left(4\tau^2+1\right)}$$

Voici les profils représentés graphiquement, suivant les diverses valeurs du paramètre β :



.

Lien avec d'autres formules, solutions du même problème

Pour un cône sphérique fini d'angle ouvert dont la condition limite radiale est homogène et constante sur la surface latérale du cône :

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T(r,\theta)=0\\ T(r,\theta)\big|_{r=r_0}=0 \quad T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0\\ T(r,\theta)\ fini\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$T(r,\theta)=T_0\left(1+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_n}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right)\qquad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

Ce n'est pas exactement ce résultat qu'il nous faut utiliser, mais celui sur le cône sphérique non bornée, dont nous avons également calculer la solution par un développement en série avec ce même type de fonction limite constante. Dans ce cas la solution est la suivante :

$\lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta T(r,\theta)=0\\ (r,\theta)\in\{0\le r<\infty,0\le\theta<\theta_0\}\\ T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=\begin{cases}T_0 & 0\le r\le r_0\\ 0 & r_0\le r<\infty\end{cases}\\ Lim_{r\to\infty}T(r,\theta)=0\end{array}\right\}\Rightarrow T(r,\theta)=\begin{cases}T_0\left(1+\displaystyle\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{\lambda_n\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_n}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right) & 0\le r\le r_0\\ -T_0\displaystyle\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{1}{(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda_n+1}P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) & r_0\le r<\infty\end{cases}$$

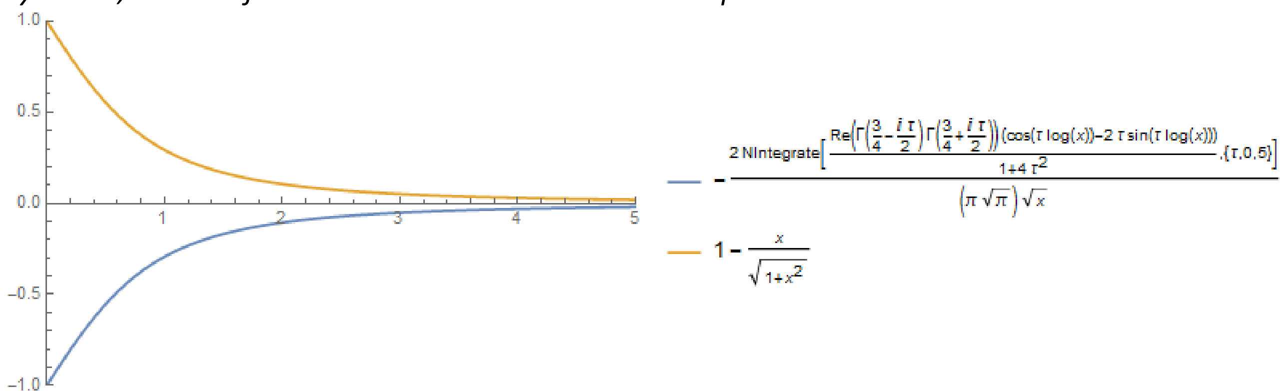
Dans ce cas le profil de solution sur l'axe z était particulièrement simple :

$$\frac{T(r,\theta)}{T_0}=1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad x=\frac{r}{r_0}.$$

Autant dire qu'il faudrait démontrer que :

$$\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{(Cos(\tau\ Log(x))-2\tau\ Sin(\tau\ Log(x)))\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{(4\tau^2+1)}=1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Il est clair qu'en calculant numériquement cette intégrale afin d'en représenter le graphe par symétrie, les deux fonctions semblent coïncider numériquement :



Prenons encore un autre exemple, où la fonction limite est constante sur un support bornée netre r1 et r2 et nulle ailleurs :

$$f_r(r) = T_0 \begin{cases} r^\beta & si \quad r \in [r_1, r_2] \\ 0 & si \quad r \in [0, r_1[\cup]r_2, +\infty) \end{cases} \qquad \beta \geq 0$$

On peut calculer la représentation intégrale :

$$T(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^{+\infty} d\tau \left(F^c(\tau) Cos(\tau\ Log(r)) + F^s(\tau) Sin(\tau\ Log(r))\right) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$avec \quad F^c(\tau) = \frac{T_0}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} dr\ r^{\beta-1/2} Cos(\tau\ Log(r)) \qquad F^c(\tau) = \frac{T_0}{\pi} \int_{r1}^{r_2} dr\ r^{\beta-1/2} Sin(\tau\ Log(r))$$

$$C = \int_{r_1}^{r_2} dr\ r^{\beta-1/2} Cos(\tau\ Log(r)) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi\ e^{(\beta+1/2)\xi} Cos(\tau\ \xi) =$$

$$= \frac{e^{(\beta+1/2)\xi_2}\left((\beta+1/2) Cos(\tau\ \xi_2) + \tau\ Sin(\tau\ \xi_2)\right) - e^{(\beta+1/2)\xi_1}\left((\beta+1/2) Cos(\tau\ \xi_1) + \tau\ Sin(\tau\ \xi_1)\right)}{\left(\tau^2 + (\beta+1/2)^2\right)}$$

$$S = \int_0^{r_0} dr\ r^{\beta-1/2} Sin(\tau\ Log(r)) = \int_{-\infty}^{\xi_0} d\xi\ e^{(\beta+1/2)\xi} Sin(\tau\ \xi) =$$

$$= \frac{e^{(\beta+1/2)\xi_2}\left((\beta+1/2) Sin(\tau\ \xi_2) - \tau\ Cos(\tau\ \xi_2)\right) - e^{(\beta+1/2)\xi_1}\left((\beta+1/2) Sin(\tau\ \xi_1) - \tau\ Cos(\tau\ \xi_1)\right)}{\left(\tau^2 + (\beta+1/2)^2\right)}$$

$$\left(F^c(\tau) Cos(\tau\ Log(r)) + F^s(\tau) Sin(\tau\ Log(r))\right) =$$

$$= \frac{T_0}{\pi} \frac{\begin{bmatrix} r_2^{(\beta+1/2)}\left((\beta+1/2) Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right) - \tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)\right) - \\ - r_1^{(\beta+1/2)}\left((\beta+1/2) Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right) - \tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)\right) \end{bmatrix}}{\left(\tau^2 + (\beta+1/2)^2\right)}$$

Il vient la solution sous forme de la représentation intégrale suivante :

$$T(r,\theta) = \frac{T_0 r_2^\beta}{\pi} \sqrt{\frac{r_2}{r}} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\left((\beta+1/2) Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right) - \tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2 + (\beta+1/2)^2\right)} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))} -$$

$$- \frac{T_0 r_1^\beta}{\pi} \sqrt{\frac{r_1}{r}} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\left((\beta+1/2) Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right) - \tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)\right)}{\left(\tau^2 + (\beta+1/2)^2\right)} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

Lorsque β=0, soit des conditions aux limites constantes et à support borné, il vient :

$$T(r,\theta) = \frac{2T_0}{\pi} \sqrt{\frac{r_2}{r}} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\left(Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right) - 2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2 + 1\right)} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))} -$$

$$- \frac{2T_0}{\pi} \sqrt{\frac{r_1}{r}} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\left(Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right) - 2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2 + 1\right)} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

.

Représentation intégrale pour le cas β=0 et $\vartheta_0=\pi/2$

$$\frac{T(r,\theta)}{T_0}=\frac{2r_2^{\beta}}{\pi}\sqrt{\frac{r_2}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\left((2\beta+1)Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2+(2\beta+1)^2\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}-$$

$$-\frac{2r_1^{\beta}}{\pi}\sqrt{\frac{r_1}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\left((2\beta+1)Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2+(2\beta+1)^2\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}$$

$$\beta=0\rightarrow\frac{T(r,\theta)}{T_0}=\frac{2r_2^{\beta}}{\pi}\sqrt{\frac{r_2}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\left(Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2+1\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}-$$

$$-\frac{2r_1^{\beta}}{\pi}\sqrt{\frac{r_1}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\left(Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)\right)}{\left(4\tau^2+1\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}$$

Sur l'axe z, soit $\vartheta=0$, il vient :

$$\theta=0\quad;\quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(1)=1\quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{2r_2^{\beta}}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{r_2}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\left((2\beta+1)Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{\left(4\tau^2+(2\beta+1)^2\right)}-$$

$$-\frac{2r_1^{\beta}}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{r_1}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\left((2\beta+1)Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{\left(4\tau^2+(2\beta+1)^2\right)}$$

$$\beta=0\Rightarrow\frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{r_2}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\left(Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{\left(4\tau^2+1\right)}-$$

$$-\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{r_1}{r}}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\left(Cos\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)-2\tau\ Sin\left(\tau\ Log\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{\left(4\tau^2+1\right)}.$$

Comme on a supposé que l'intégrale suivante représentait le profil sur l'axe z :

$$\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{(Cos(\tau\ Log(x))-2\tau\ Sin(\tau\ Log(x)))\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{\left(4\tau^2+1\right)}=1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On retrouve bien le profil de la solution :

$$\frac{T(r,0)}{T_0}=\frac{r}{\sqrt{r^2+r_1^2}}-\frac{r}{\sqrt{r^2+r_2^2}}$$